

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ

A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON

W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 2. SEPTEMBER 1949)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1949

**Math.
Z.**

Preis DMark 19.60

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),

F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band.

Inhalt:

3. Heft.

Seite

Meyer-König, Dr. W., Stuttgart, Math. Sem. d. Techn. Hochschule: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren	257
Karamata, Prof. J., Zemun (Jugoslawia) Sv. Nikolajevska 20: Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren	305
Stoll, W., Tübingen, Ebert-Str. 8: Eine Bemerkung über die Dirichletschen L-Reihen	307
Specht, Dr. W., Erlangen, Nürnberger Str. 77: Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen	310
Haaek, Prof. Dr. W., Bad Gandersheim, Grasweg 2: Strahlenkomplexe mit integrierbaren Pfaffschen Differentialformen	322
Richert, H.-E., Hamburg 19, Osterstr. 71: Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen	342
Meyer-König, Dr. W., Stuttgart, Math. Sem. d. Techn. Hochschule: Die E_p - und S_a -Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze	344

Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren*).

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

Bei den folgenden Untersuchungen wird ausgegangen von drei Klassen bekannter Limitierungsverfahren: den EULER-KNOPPSchen Verfahren (E_p -Verfahren), dem BORELSchen Verfahren (B -Verfahren) und den TAYLOR-Verfahren (T_α -Verfahren). Während die beiden ersten Klassen schon lange bekannt sind und eingehende Behandlung fanden, wurde das von G. H. HARDY u. J. E. LITTLEWOOD eingeführte und ursprünglich als Kreisverfahren (circle method) bezeichnete TAYLOR-Verfahren bisher nur durch R. WAIS systematisch untersucht.

Über die gegenseitigen Beziehungen dieser Verfahren weiß man, daß die von einem Parameter p ($0 < p < \infty$) abhängigen E_p -Verfahren mit wachsendem p immer wirksamer werden, d. h. einen immer umfassenderen Bereich von Folgen zu limitieren vermögen, und daß sie für $p \rightarrow \infty$ in das B -Verfahren einmünden. Auch die T_α -Verfahren hängen von einem Parameter α ($0 < \alpha < 1$) ab und werden (mit einer Einschränkung) mit zunehmendem α immer wirksamer. Weiter besteht ein — von HARDY und LITTLEWOOD als very beautiful bezeichneter — Zusammenhang zwischen dem $T_{1/2}$ -Verfahren und dem B -Verfahren. Derselbe geht auf eine Vermutung von M. RIESZ zurück und wurde von HARDY und LITTLEWOOD präzisiert: Die Verfahren $T_{1/2}$ und B sind äquivalent unter einer gewissen Voraussetzung über die Größenordnung der Glieder der zu limitierenden Folge.

Zu dieser Gruppe von Verfahren will die vorliegende Arbeit einige Beiträge liefern. Zunächst wird das TAYLORSche Verfahren noch einmal im Zusammenhang und in gegenüber dem Bisherigen teilweise erweiterter Form dargestellt. Sodann wird — und darin ist der hauptsächlichste Inhalt dieser Untersuchungen zu erblicken — durch eine Modifikation der T_α -Verfahren eine neue Klasse von Limitierungsverfahren gebildet, deren Einführung den hier betrachteten Kreis von Verfahren ergänzt und abrundet. Auch bei diesen neuen, mit S_α bezeichneten Verfahren handelt es sich um eine von einem Parameter

*) Gekürzte Fassung der im Juni 1947 bei der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart eingereichten Habilitationsschrift des Verfassers.

$\alpha (0 < \alpha < 1)$ abhängige Klasse von Limitierungsverfahren, deren Wirksamkeit (mit einer Einschränkung) mit wachsendem α zunimmt. Diese Verfahren schließen sich an die Reihe der E_p - und B -Verfahren, die bisher mit dem B -Verfahren ihren Abschluß gefunden zu haben schienen, in natürlicher Weise an. Es ist nämlich die Gesamtheit der E_p -, B - und S_α -Verfahren miteinander verträglich und bildet (mit einer Einschränkung) in dieser Reihenfolge eine Gruppe von Verfahren zunehmender Wirksamkeit. Besonders deutlich kommt die Zusammengehörigkeit der genannten Verfahren in ihrem Verhalten gegenüber den TAYLOR-Verfahren zum Ausdruck. Die erwähnte Äquivalenzbeziehung zwischen dem B - und dem $T_{1/2}$ -Verfahren erweist sich nämlich als Spezialfall eines allgemeinen Äquivalenzsatzes, der die E_p -, B - und S_α -Verfahren auf der einen Seite mit den T_α -Verfahren auf der anderen Seite verbindet. Nach diesem Satze ist im Bereich der Zahlenfolgen $s_n = o(\sqrt{n})$ jedes T_α -Verfahren einem bestimmten Verfahren der Gruppe E_p, B, S_α äquivalent und umgekehrt, so daß die Verfahren der genannten Gruppe in ihrer Gesamtheit den T_α -Verfahren gegenüberzustellen sind. Hier zeigt sich, daß die Gruppe E_p, B, S_α nun wirklich ein abgeschlossenes Ganzes darstellt. Die so in Erscheinung tretende Verwandtschaft der sämtlichen in Rede stehenden Verfahren äußert sich auch darin, daß dieselben für beschränkte Folgen überhaupt alle äquivalent sind. Von dieser Tatsache aus ergeben sich leicht Umkehrsätze unserer Verfahren, die in einem Umkehrsatz für das S_α -Verfahren enthalten sind. Dessen Beweis bildet den Schluß dieser Untersuchungen, bei deren Abfassung Verf. verschiedene Ratschläge von Herrn F. LÖSCH verwerten durfte.

§ 1.

Matrixtransformationen und Limitierungsverfahren.

1.1. Wir beginnen mit einer Übersicht über einige ständig gebrauchte Bezeichnungen und einer Zusammenstellung der im folgenden benötigten wenigen Tatsachen aus der Matrizenrechnung¹⁾.

Es sei

$$V = (V_{nv}) \text{ oder kurz } V = V_{nv}$$

eine Matrix mit den Elementen V_{nv} ($n, v \geq 0$, ganz). Wir nennen V positiv, wenn $V_{nv} \geq 0$ ist. Wir nennen V permanent, wenn die folgenden drei Voraussetzungen erfüllt sind:

- (Zn). Die Zeilennormen $\sum_{v=0}^{\infty} |V_{nv}|$ sind vorhanden und beschränkt für $n \rightarrow \infty$.

¹⁾ Vgl. K. KNOPP [6], S. 331 ff. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit.

(Sp). Für jedes feste ν strebt die Spaltenfolge $V_{n\nu} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

(Zs). Die Zeilensummen $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu}$ streben gegen 1 für $n \rightarrow \infty$.

Mit Hilfe einer permanenten Matrix V definieren wir nun ein Limitierungsverfahren, das wir als Verfahren V oder V -Verfahren bezeichnen. Es sei s_n ($n \geq 0$, ganz) eine Folge. Wir nennen die Matrix V oder das Verfahren V auf die Folge s_n anwendbar, wenn die V -Transformation

$$Vs = V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{n\nu} s_\nu$$

der Folge s_n für alle ganzen $n \geq 0$ vorhanden ist. Wird nichts anderes gesagt, so soll die Folgennummer bei Vs wie soeben stets n sein. V ist auf s_n z. B. dann anwendbar, wenn V eine Dreiecksmatrix ist, d. h. wenn $V_{n\nu} = 0$ ist für $\nu > n$, oder wenn s_n beschränkt ist. Ist V auf s_n anwendbar und strebt Vs gegen einen Grenzwert s für $n \rightarrow \infty$, so sagen wir, das Verfahren V limitiere die Folge s_n zum Wert s , und schreiben

$$V\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{oder kurz} \quad V\text{-}\lim s_n = s.$$

Aus der Permanenz der Matrix V folgt, daß das Limitierungsverfahren V permanent ist, d. h. daß $s_n \rightarrow s$ stets $Vs \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ nach sich zieht.

Oft ist es zweckmäßig, neben der Folge s_n die unendliche Reihe heranzuziehen, deren Teilsummen die s_n sind. Die Glieder dieser Reihe bezeichnen wir dann mit a_n . Es ist also stets

$$s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \quad (n \geq 0, \text{ ganz}).$$

Ist V auf s_n anwendbar, ist also $t_n = Vs$ vorhanden, so können wir die t_n als die Teilsummen einer unendlichen Reihe mit den Gliedern b_n auffassen:

$$t_n = \sum_{\nu=0}^n b_\nu \quad (n \geq 0, \text{ ganz}).$$

Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ als die V -Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ist $V\text{-}\lim s_n = s$, so ist dies gleichbedeutend mit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s$.

Wir schreiben dafür auch

$$V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

und sagen, das Verfahren V summiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zum Wert s .

Sind $V = V_{n\nu}$ und $W = W_{n\nu}$ permanente Matrizen, so existiert die wiederum permanente Produktmatrix

$$U = VW = U_{n\nu} = (VW)_{n\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} V_{n\mu} W_{\mu\nu}.$$

Diese Produktbildung ist assoziativ. Sie tritt dann auf, wenn man zwei Folgentransformationen hintereinanderschaltet. Unter zusätzlichen Voraussetzungen gilt nämlich die Gleichung

$$(1.1.1) \quad (VW)s = V(Ws),$$

z. B. dann, wenn V und W Dreiecksmatrizen sind, oder dann, wenn s_n beschränkt ist. Wir benötigen im folgenden ein Kriterium, das die Richtigkeit von (1.1.1) auch dann sichert, wenn keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, und formulieren dazu den einfachen, von der Bezeichnung $V|s| = V(n; |s_v|)$ Gebrauch machenden und leicht zu beweisenden

Satz 1. *V und W seien positive, permanente Matrizen. Für die Folge s_n sei entweder $(VW)|s|$ oder sowohl $W|s|$ als auch $V(W|s|)$ vorhanden. Dann sind auch $(VW)s$ und sowohl Ws als auch $V(Ws)$ vorhanden, und es gilt (1.1.1).*

Die beiden permanenten Limitierungsverfahren V und W heißen miteinander verträglich, wenn aus $V\text{-lim } s_n = s$ und $W\text{-lim } s_n = s'$ die Gleichheit $s = s'$ beider Grenzwerte folgt. Die Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn aus $V\text{-lim } s_n = s$ stets $W\text{-lim } s_n = s$ folgt und umgekehrt.

1.2. Neben den Verfahren T_a und S_a , die wir später definieren werden, wird uns das EULER-KNOPPSche und das BORELSche Verfahren²⁾ beschäftigen. Wir erwähnen darüber einige bekannte, im folgenden gebrauchte Tatsachen.

Das EULER-KNOPPSche Verfahren E_p der reellen positiven Ordnung p gründet sich auf die positive und permanente Dreiecksmatrix

$$E_p = \frac{1}{2^{pn}} \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} \quad (n, v \geq 0).$$

Sind u und v positiv, so ist

$$E_u E_v = E_{u+v}.$$

Für $0 < p < q$ ist also $E_q = E_{q-p} E_p$. Von dieser Gleichung können wir nach den zu (1.1.1) gemachten Bemerkungen bei beliebiger Folge s_n zu der Gleichung

$$E_q s = E_{q-p} (E_p s)$$

übergehen. Die E_p -Transformation von s_n geht also durch Vermittlung der permanenten Matrix E_{q-p} in die E_q -Transformation über. $E_p\text{-lim } s_n = s$ hat daher $E_q\text{-lim } s_n = s$ zur Folge ($E_p \rightarrow E_q$ -Satz).

Das BORELSche Verfahren B ordnet der Folge s_n die B -Transformation

$$Bs = B(x; s_v) = e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} s_v \quad (x > 0)$$

²⁾ Vgl. K. KNOPP [3] und [4], ferner Encyklopädie [1], S. 481.

zu. Lassen wir also bei den in 1.1 betrachteten Matrizen zu, daß an die Stelle des Zeilenindex $n \geq 0$ der kontinuierliche Index $x > 0$, an die Stelle von $n \rightarrow \infty$ jetzt $x \rightarrow \infty$ tritt, während der Spaltenindex auf ganzzahlige $v \geq 0$ beschränkt bleibt, so ist das B -Verfahren das zu der positiven und permanenten Matrix

$$B = B_{x,v} = e^{-x} \frac{x^v}{v!} \quad (x > 0; v \geq 0, \text{ ganz})$$

gehörige Limitierungsverfahren. Ist $V = V_{n\nu}$ eine permanente Matrix, so existiert wie im analogen Fall in 1.1 die wiederum permanente Produktmatrix

$$BV = (BV)_{x,v} = e^{-x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu}}{\mu!} V_{\mu v} \quad (x > 0; v \geq 0, \text{ ganz}),$$

und entsprechend dem Satz 1 gilt die Gleichung

$$(BV)(x; s_v) = B(x; Vs),$$

sofern entweder $BV(x; |s_v|)$ oder sowohl $V|s|$ als auch $B(x; V|s|)$ vorhanden ist. Beispielsweise ist

$$(BE_p)_{x,v} = B_{y,v} \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{2^p} > 0.$$

Beachtet man, daß $s_n = o((2^{p+1} - 1)^n)$ eine notwendige Bedingung für die E_p -Limitierbarkeit der Folge s_n ist, so ergibt sich aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ die Existenz von $B(y; |s_v|)$ für jedes positive y , also die Anwendbarkeit von B auf $E_p s$ und die Gleichung

$$B(y; s_v) = B(x; E_p s) \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{2^p}, \quad x > 0.$$

Aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ folgt daher $B\text{-lim } s_n = s$ ($E_p \rightarrow B$ -Satz).

Eine gute Orientierung über die Stärke eines Limitierungsverfahrens ergibt sich manchmal durch Anwendung desselben auf die geometrische Reihe. Es sei V positiv und permanent. Dann wird die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ genau für diejenigen z -Werte summiert, und zwar zum Wert $\frac{1}{1-z}$, für die die Folge z^n zum Wert 0 limitiert wird. Denn für $z \neq 1$ ist

$$V\left(n; \frac{1-z^{v+1}}{1-z}\right) = V\left(n; \frac{1}{1-z}\right) - \frac{z}{1-z} V(n; z^v),$$

und für den Fall $z = 1$ läßt sich unschwer zeigen, daß $V(n; v+1) \rightarrow +\infty$ strebt für $n \rightarrow \infty$. Den Bereich der z -Werte, für die $V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'(V)^3$. Es ist

$$E_p(n; z^v) = \frac{(2^p - 1 + z)^n}{2^{pn}}, \quad B(x; z^v) = e^{-x(1-z)}.$$

³⁾ Mit der Bezeichnung $\mathfrak{G}'$ bleiben wir für diejenigen Verfahren, die sich als verallgemeinerte EULERSche Reihentransformation auffassen lassen, in Einklang mit der von K. KNOPP ([5], S. 319) gewählten Bezeichnung.

Daher erhalten wir für die Gebiete $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(B)$:

$$\mathfrak{G}'(E_p): |z + 2^p - 1| < 2^p, \quad \mathfrak{G}'(B): \Re z < 1.$$

Dieselben illustrieren anschaulich den $E_p \rightarrow E_q$ -Satz ($0 < p < q$) und den $E_p \rightarrow B$ -Satz ($p > 0$): $\mathfrak{G}'(E_p)$ wird von $\mathfrak{G}'(E_q)$ und von $\mathfrak{G}'(B)$ überdeckt.

§ 2.

Das T_α -Verfahren.

2.1. Es sei — wie stets, wenn nichts anderes gesagt ist — $0 < \alpha < 1$. Im Anschluß an G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD definieren wir nun das T_α -Verfahren als das zu der positiven Matrix

$$T_\alpha = (1 - \alpha)^{n+1} \binom{v}{n} \alpha^{v-n} \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz})$$

gehörige Limitierungsverfahren, das wir mit R. WAIS als TAYLORSCHES Verfahren der Ordnung α bezeichnen⁴⁾. T_α ist permanent. Denn diejenigen Elemente von T_α , für die $0 \leq v < n$ ist, verschwinden, so daß gewiß die Bedingung (Sp) erfüllt ist. Die Bedingungen (Zn) und (Zs) sind erfüllt wegen

$$(1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v}{n} \alpha^{v-n} = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v = 1 \quad (n \geq 0).$$

Das Verfahren T_α genügt daher der Permanenzforderung: Aus $s_n \rightarrow s$ folgt $T_\alpha s \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$. Dabei ist also

$$T_\alpha s = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v}{n} \alpha^{v-n} s_v = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v}.$$

T_α ist auf die Folge s_n anwendbar, wenn für jedes $n \geq 0$ die Reihe

$$(2.1.1) \quad \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v}{n} \alpha^v s_v$$

konvergiert. Ist diese Konvergenz für die feste Nummer $n \geq 0$ vorhanden, so ist für dieses n wegen $\binom{v}{n} \asymp \frac{v^n}{n!}$ bei $v \rightarrow \infty$ der Ausdruck $v^n \alpha^v s_v$ beschränkt⁵⁾. Ist umgekehrt mit einer festen Nummer $m \geq 2$

$$v^m \alpha^v |s_v| < M \quad \text{für } v \geq 0$$

(M von v unabhängig), so ist für jede feste Nummer n

$$\binom{v}{n} \alpha^v |s_v| < \frac{M}{v^m} \binom{v}{n} \asymp \frac{M}{n!} \frac{1}{v^{m-n}} \quad \text{bei } v \rightarrow \infty,$$

⁴⁾ G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD [2], insbes. S. 52, 4.5 (ii) und R. WAIS [9], S. 5.

⁵⁾ Sind c_n und d_n Folgen und ist s konstant, so soll $c_n \asymp s d_n$ gleichbedeutend sein mit $c_n/d_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$.

also die Reihe (2.1.1) für $0 \leq n \leq m-2$ absolut konvergent. Für die Anwendbarkeit von T_α auf s_n ist also notwendig und hinreichend die Bedingung

$$(2.1.2) \quad s_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^n \alpha^\nu}\right) \text{ für jedes } n \geq 0 \text{ bei } \nu \rightarrow \infty.$$

Ist sie erfüllt, so konvergiert die Reihe für $T_\alpha s$ für alle n absolut. Mit $T_\alpha s$ ist auch $T_\alpha |s|$ vorhanden.

Es folgt: T_α ist auf s_n sicher dann anwendbar, wenn der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ größer als α ist; umgekehrt gilt sicher $r \geq \alpha$, wenn T_α auf s_n anwendbar ist. Bei HARDY und LITTLEWOOD wird die T_α -Transformation nur in Fällen mit $r = 1$ gebildet. R. WAIS, die das T_α -Verfahren mehr systematisch untersucht hat, verlangt $r > \alpha$, wenn $T_\alpha \text{-lim } s_n = s$ sein soll. Die oben gewählte Definition ist etwas allgemeiner, da bei ihr auch der Fall $r = \alpha$ möglich ist, wodurch das Anwendungsfeld des Verfahrens vergrößert wird.

Der Permanenzsatz des T_α -Verfahrens ist für $a = 1$ enthalten in dem folgenden

Satz 2. Es sei $0 < a < \frac{1}{\alpha}$, s beliebig, ferner $s_n \cong s a^n$ für $n \rightarrow \infty$, so daß gewiß T_α auf s_n anwendbar ist. Dann gilt

$$T_\alpha s \cong \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a} \left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a} \right)^n.$$

Beweis. Ist $|s_n - s a^n| < \varepsilon a^n$ für $n > m$, so ist dafür

$$\begin{aligned} \left| T_\alpha s - \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha a} \left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a} \right)^n \right| &= (1-\alpha)^{n+1} \left| \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{n}{\mu} \alpha^{\mu-n} (s_\mu - s a^\mu) \right| \\ &< (1-\alpha)^{n+1} \varepsilon \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{n}{\mu} \alpha^{\mu-n} a^\mu = \varepsilon \frac{1-\alpha}{1-\alpha a} \left(\frac{(1-\alpha)a}{1-\alpha a} \right)^n. \end{aligned}$$

Daß das T_α -Verfahren divergente Folgen zu limitieren vermag, zeigen einfache Beispiele. Wir untersuchen, in welchem Bereich $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ zum Wert $\frac{1}{1-z}$ summiert oder die Folge z^n zum Wert 0 limitiert wird. T_α ist auf z^n anwendbar für $|z| < \frac{1}{\alpha}$, und es ist in diesem Fall

$$T_\alpha(n; z^n) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z} w^n \quad \text{mit} \quad w = \frac{(1-\alpha)z}{1-\alpha z}.$$

Dieser Ausdruck strebt gegen 0 für $|w| < 1$. Damit läßt sich das Gebiet $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ leicht feststellen. Man findet⁶⁾:

⁶⁾ Vgl. R. WAIS [9], S. 40 ff.

$$(2.1.3) \quad \mathfrak{G}'(T_\alpha): \begin{cases} \left| z - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right| < \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} & \text{für } 0 < \alpha \leq \frac{1}{3}, \\ \left| z - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right| < \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, |z| < \frac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \Re z < 1, |z| < 2 & \text{für } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \left| z - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right| > \frac{1-\alpha}{2\alpha-1}, |z| < \frac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Das Verfahren T_α vermag also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in außerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Gebieten zu summieren. Jedoch liegen alle Gebiete $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ im Innern des Kreises $|z| = 3$.

2.2. Um die funktionentheoretische Seite des T_α -Verfahrens, die für HARDY und LITTLEWOOD und R. WAIS den Ausgangspunkt der Definition bildete, darzustellen, untersuchen wir, welche Gestalt die T_α -Transformation beim Übergang von Folgen zu Reihen annimmt.

Es sei T_α auf s_n anwendbar. Wir setzen $t_n = T_\alpha s = \sum_{v=0}^n b_v$ und wollen die b_n in den a_n ausdrücken. Es ist

$$b_0 = t_0 = (1-\alpha) \sum_{v=0}^{\infty} \alpha^v s_v = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha^v a_v,$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{(1-\alpha)^n} &= \frac{t_n - t_{n-1}}{(1-\alpha)^n} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} \\ &\quad - \left(\sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^{v+1} s_{n+v} + s_{n-1} + \sum_{v=1}^{\infty} \binom{n+v-1}{v} \alpha^v s_{n+v-1} \right) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} - \left(s_{n-1} + \sum_{v=1}^{\infty} \left[\binom{n+v-1}{v-1} + \binom{n+v-1}{v} \right] \alpha^v s_{n+v-1} \right) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} - \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v a_{n+v}; \\ b_n &= (1-\alpha)^n \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v a_{n+v} = \frac{1}{1-\alpha} T_\alpha(n; a_v) \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Daß T_α auf a_n anwendbar ist, hat sich dabei von selbst mitergeben. Wir zeigen, daß umgekehrt aus der Anwendbarkeit von T_α auf a_n die Anwendbarkeit auf s_n folgt. Für ein festes $n \geq 0$ sei

$$v^n \alpha^v |a_v| < M \quad (v > 0, M \text{ von } v \text{ unabhängig}).$$

Dann ist, wenn μ ganz und $\frac{v-1}{2} \leq \mu \leq \frac{v}{2}$ ist,

$$\begin{aligned}
v^n \alpha^v |s_v| &< v^n \alpha^v |a_0| + M \sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{v^\lambda \alpha^\lambda}{\lambda^n \alpha^\lambda} + M \sum_{\lambda=\mu+1}^v \frac{v^\lambda \alpha^\lambda}{\lambda^n \alpha^\lambda} \\
&< v^n \alpha^v |a_0| + M v^n \alpha^{v-\mu} \sum_{\sigma=0}^{\mu-1} \alpha^\sigma + M \left(\frac{v}{\mu+1} \right)^n \sum_{\sigma=0}^{v-\mu-1} \alpha^\sigma \\
&< v^n \alpha^v |a_0| + \frac{M}{1-\alpha} (v^n \alpha^{\frac{v}{2}} + 2^n) = O(1) \quad \text{für } v \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Wir formulieren das Ergebnis als

Satz 3. Die Anwendbarkeit von T_α auf s_n ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf a_n . Die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\alpha(n; s_v) = s$ ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$(2.2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v a_{n+v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_\alpha(n; a_v)}{1-\alpha} = s,$$

in der links die T_α -Transformation der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ steht.

Nun sei T_α auf a_n anwendbar. Wegen der auf a_n anstatt s_n angewandten Bedingung (2.1.2) konvergieren die Reihen

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v, \quad \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} a_{n+v} z^v \quad (n \geq 0)$$

vom Konvergenzradius $r \geq \alpha$ absolut für $|z| \leq \alpha$. Ist $f(z)$ in $z = \alpha$ regulär, so ist wegen des ABELSchen Stetigkeitssatzes

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} T_\alpha(n; a_v),$$

also die Gleichung (2.2.1) gleichbedeutend damit, daß die TAYLOR-Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) (z-\alpha)^n = \mathfrak{P}(z-\alpha)$$

von $f(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ im Punkt $z = 1$ zur Summe s konvergiert. Verstehen wir unter $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ das Kreisgebiet

$$\mathfrak{G}(T_\alpha): |z-\alpha| < 1-\alpha,$$

so gilt also

Satz 4. T_α sei auf a_n anwendbar, so daß $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für $|z| < \alpha$ regulär ist. Ist $f(z)$ auch für $z = \alpha$ regulär, so ist dann und nur dann $T_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, wenn sich $f(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}(T_\alpha)$ hinein analytisch fortsetzen läßt und das Funktionselement $\mathfrak{P}(z-\alpha)$, das diese Fortsetzung bewirkt, im Punkt $z = 1$, also für $z-\alpha = 1-\alpha$ zum Wert s konvergiert.

Setzen wir $z-\alpha = y$, so bekommen wir im Falle der Regularität von $f(z)$ für $z = \alpha$ das Funktionselement $\mathfrak{P}(y)$ formal dadurch, daß

wir in $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ mit $z = \alpha + y$ eingehen und nach Potenzen von y umordnen:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} a_v (\alpha + y)^v &= \sum_{v=0}^{\infty} a_v \sum_{n=0}^v \binom{v}{n} \alpha^{v-n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v}{n} \alpha^{v-n} a_v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(1-\alpha)^{n+1}} T_{\alpha}(n; a_v) = \mathfrak{P}(y). \end{aligned}$$

Die T_{α} -Transformation (2.2.1) von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erhalten wir dann, indem wir in der umgeordneten Reihe $y = 1 - \alpha$ setzen. Wir können statt dessen, indem wir $\frac{y}{1-\alpha} = \frac{z-\alpha}{1-\alpha} = x$ setzen, auch $z = \alpha + (1-\alpha)x$ in $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ einführen, nach Potenzen von x umordnen, was

$$f(\alpha + (1-\alpha)x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-\alpha} T_{\alpha}(n; a_v) = \mathfrak{P}((1-\alpha)x) = \mathfrak{Q}(x)$$

liefert, und hierauf $x = 1$ setzen.

Ist nun aber $f(z)$ in $z = \alpha$ singulär, so entsteht die Reihe (2.2.1) zwar immer noch aus der formal wie soeben gebildeten Potenzreihe $\mathfrak{P}(y)$ für $y = 1 - \alpha$ oder $\mathfrak{Q}(x)$ für $x = 1$, doch können dann die Funktionselemente $\mathfrak{P}(y)$ und $\mathfrak{Q}(x)$, wenn sie positive Konvergenzradien besitzen, nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$ sein.

Wir werden in späteren Beweisen verschiedentlich mit $\mathfrak{P}(y)$ als der Fortsetzung von $f(z)$ arbeiten und dann außer der Anwendbarkeit von T_{α} auf s_n auch die Regularität von $f(z)$ in $z = \alpha$ verlangen müssen. Diese Bedingung ist aber immer noch allgemeiner, als wenn wir $r > \alpha$ als Voraussetzung für $T_{\alpha}\text{-}\lim s_n = s$ verlangen würden.

Die funktionentheoretische Fassung des T_{α} -Verfahrens zeigt, daß wir es, wie schon R. WAIS [9] festgestellt hat, im wesentlichen mit einer verallgemeinerten EULERSchen Reihentransformation im Sinne von K. KNOPP [5] zu tun haben. Bei einer solchen wird zur Summierung der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ das z in $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ersetzt durch die Reihe $E(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{\lambda} x^{\lambda}$, die gewissen Bedingungen genügen muß, dann wird nach Potenzen von x umgeordnet und schließlich $x = 1$ gesetzt. Das T_{α} -Verfahren erhalten wir für $E(x) = \alpha + (1-\alpha)x$. Die von K. KNOPP an $E(x)$ gestellten Forderungen sind erfüllt mit der Ausnahme, daß das Gebiet $\mathfrak{G}(T_{\alpha})$ der z -Ebene, in welches das Gebiet $|x| < 1$ durch die Abbildung $z = E(x)$ übergeht, für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ nicht alle Eigenschaften einer erzeugenden Figur besitzt⁷⁾.

⁷⁾ Auf die Anwendung des T_{α} -Verfahrens zur Summierung von Potenzreihen gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Da diese Frage auch bei R. WAIS [9] nicht vollständig behandelt ist, sei hier wenigstens erwähnt, daß der Hauptsatz 2 von K. KNOPP ([5], S. 332), angewendet auf das T_{α} -Verfahren, auch in den Fällen im Ergebnis richtig bleibt, in denen $\mathfrak{G}(T_{\alpha})$ keine erzeugende Figur ist.

Im Anschluß an K. KNOPP hat F. LÖSCH [7] die EULERSche Reihen-transformation noch weiter so verallgemeinert, daß bei der Anwendung auf die Potenzreihe $F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ darin die TAYLOR-Transformation, d. h. die Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

von $F(z)$ um einen neuen Mittelpunkt z_0 als Spezialfall enthalten ist. Die T_α -Transformation des Funktionselementes $F(z)$ lautet nach (2. 2. 1) für die Stelle $z = z_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - \alpha z_1)^n \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} (\alpha z_1)^v c_{n+v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\alpha z_1) (z_1 - \alpha z_1)^n.$$

Die für einen ganzen z -Bereich angesetzte TAYLOR-Transformation eines Funktionselementes im Sinne von F. LÖSCH stimmt also mit der für dieselben z -Werte angesetzten T_α -Transformation desselben nicht überein. Übereinstimmung hat man dagegen, wenn man sich auf eine feste Stelle $z = z_1$ beschränkt und $z_0 = \alpha z_1$ wählt.

2. 3. Das Verhältnis der T_α -Verfahren verschiedener Ordnung zueinander hat R. WAIS [9] durch Hintereinanderschaltung zweier TAYLOR-Verfahren festgestellt. Es gilt

Satz 5. Es sei $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ und $\alpha + \beta - \alpha\beta = \gamma$ gesetzt, so daß $\text{Max}(\alpha; \beta) < \gamma < 1$ ist. Dann gilt

$$T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha = T_\gamma.$$

Beweis. Für $\mu \geq n \geq 0$, $v \geq 0$ ist

$$\binom{v}{\mu} \binom{\mu}{n} = \binom{v}{n} \binom{v-n}{\mu-n},$$

also für $n, v \geq 0$, wenn wir unter einer leeren Summe 0 verstehen,

$$\begin{aligned} T_\alpha T_\beta &= \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta) \beta^v}{\alpha^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} \binom{v}{\mu} \frac{\alpha^\mu (1-\beta)^\mu}{\beta^\mu} \\ &= \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta) \beta^v}{\alpha^n} \binom{v}{n} \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{v-n}{\mu-n} \frac{\alpha^\mu (1-\beta)^\mu}{\beta^\mu} \\ &= \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^{n+1} \beta^v}{\beta^n} \binom{v}{n} \sum_{\lambda=0}^{v-n} \binom{v-n}{\lambda} \frac{\alpha^\lambda (1-\beta)^\lambda}{\beta^\lambda} \\ &= (1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^{n+1} \binom{v}{n} (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{v-n} \\ &= (1-\gamma)^{n+1} \binom{v}{n} \gamma^{v-n} = T_\gamma = T_\beta T_\alpha. \end{aligned}$$

Folgerung. Es sei $0 < \beta < \gamma < 1$, $0 < a < \frac{1-\beta}{\gamma-\beta}$ und T_γ auf s_n anwendbar, so daß gewiß auch T_β auf s_n anwendbar ist. Weiter sei $T_\beta s \cong s a^n$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist

$$T_\gamma s \cong \frac{(1-\gamma)s}{1-\beta-a(\gamma-\beta)} \left(\frac{(1-\gamma)a}{1-\beta-a(\gamma-\beta)} \right)^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha = \frac{\gamma - \beta}{1 - \beta}$. Nach Satz 5 ist dann $T_\gamma = T_\alpha T_\beta$. Da T_γ auf s_n und also auf $|s_n|$ anwendbar ist, gilt nach Satz 1: $T_\gamma s = T_\alpha(T_\beta s)$. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 2. Insbesondere dürfen wir $\alpha = 1$ nehmen und erhalten damit

Satz 6. *Es sei $0 < \beta < \gamma < 1$, $T_\beta\text{-lim } s_n = s$ und T_γ auf s_n anwendbar. Dann ist $T_\gamma\text{-lim } s_n = s$.*

In einem gewissen eingeschränkten Sinn ist also das TAYLORSche Verfahren umso stärker, je größer seine Ordnung α ist. Wir bezeichnen den Satz 6 als $T_\beta \rightarrow T_\gamma$ -Satz. Bei dieser Ausdrucksweise ist aber zu beachten, daß aus $T_\beta\text{-lim } s_n = s$ allein noch nicht $T_\gamma\text{-lim } s_n = s$ folgt. Speziell ergibt sich aus Satz 6, daß die TAYLOR-Verfahren aller Ordnungen miteinander verträglich sind.

2.4. Wir benötigen im folgenden die Umkehrung der T_α -Transformation, d. h. die Darstellung der s_n in den t_n , wenn $t_n = T_\alpha s$ ist. Wir setzen dazu voraus, daß T_α auf s_n anwendbar und $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ an der Stelle $z = \alpha$ regulär ist. Das für $|z| \leq \alpha$ konvergente Funktionselement

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} s_v z^v = \frac{1}{1-z} \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

ist dann bei $z = \alpha$ ebenfalls regulär, für ein geeignetes $\varrho > 0$ ist also

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{g^{(v)}(\alpha)}{v!} (z-\alpha)^v \quad \text{für } |z-\alpha| < \varrho$$

konvergent. Nun ist aber für $n \geq 0$

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} s_{n+v} z^v \quad \text{für } |z| < \alpha,$$

und die rechts stehende Reihe konvergiert noch für $z = \alpha$, so daß man wegen des ABELSchen Stetigkeitssatzes

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(\alpha) = \frac{t_n}{(1-\alpha)^{n+1}}$$

schreiben kann. Daher ist

$$g(z) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t_v}{(1-\alpha)^v} (z-\alpha)^v \quad \text{für } |z-\alpha| < \varrho,$$

und allgemein für $n \geq 0$

$$\frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \frac{t_{n+v}}{(1-\alpha)^v} (z-\alpha)^v \quad \text{für } |z-\alpha| < \varrho.$$

Betrachtet man nun das zu der rechts stehenden Potenzreihenentwicklung gehörige BORELSche Summabilitätspolygon⁸⁾, so stellt man leicht

⁸⁾ Vgl. Enzyklopädie [1], S. 453–455.

fest, daß der Punkt $z = 0$ in dessen Innerem liegt, da die dargestellte Funktion nicht nur in $|z - \alpha| < \varrho$, sondern auch in $|z| < \alpha$ regulär ist.

Bezeichnen wir die BORELSche Summe einer B -summierbaren Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} c_v$ mit $\sum'_{v=0}^{\infty} c_v$, so gelangt man damit wegen $s_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$ zu

Satz 7. T_α sei auf s_n anwendbar und $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ bei $z = \alpha$ regulär. Wird dann $T_\alpha s = t_n$ gesetzt, so ist für $n \geq 0$

$$(2.4.1) \quad s_n = \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^v t_{n+v}$$

mit gesicherter B -Summierbarkeit der rechts stehenden Reihe.

Wir wenden dieses Ergebnis sogleich an, um eine notwendige Bedingung für die T_α -Limitierbarkeit abzuleiten.

Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, T_α -lim $s_n = s$ und $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ bei $z = \alpha$ regulär. Dann ist

$$(2.4.2) \quad s_n = o((1-2\alpha)^{-n}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Der Beweis braucht nur für den Fall $s = 0$ geführt zu werden.

Da dann $t_n = T_\alpha s$ eine Nullfolge, außerdem $\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2}$ ist, ist die Reihe

(2.4.1) nicht nur B -summierbar, sondern sogar konvergent, und, wenn $|t_n| < \varepsilon$ ist für $n > N$, dafür

$$(1-2\alpha)^n |s_n| < \frac{(1-2\alpha)^n \varepsilon}{(1-\alpha)^{n+1}} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^v = \frac{\varepsilon}{1-2\alpha}.$$

Die damit bewiesene Bedingung (2.4.2) geht wegen $\alpha < \frac{1}{3}$ hinaus über die Bedingung (2.1.2), daß $s_v = O(v^{-n} \alpha^{-v})$ ist für jedes feste n bei $v \rightarrow \infty$. Für $\alpha \geq \frac{1}{3}$ bringt die entsprechende Überlegung keinen Gewinn. Eine in der Richtung von (2.4.2) liegende Bedingung kann man auch folgendermaßen bekommen. Nach Satz 4 ist $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für

$|z - \alpha| < 1 - \alpha$, also bei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ gewiß für $|z| < 1 - 2\alpha$ regulär. Daher hat $\sum_{v=0}^{\infty} s_v z^v$ mindestens den Konvergenzradius $1 - 2\alpha$, d. h. es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|s_n|} \leq \frac{1}{1-2\alpha}.$$

Die Bedingung (2.4.2) sagt mehr aus. Wir benützen sie zu einer teilweisen Verschärfung des Satzes 6:

Es sei $0 < \beta < \frac{1}{3}$, T_β -lim $s_n = s$ und $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ bei $z = \beta$ regulär. Dann ist T_γ -lim $s_n = s$ für jedes γ mit $\beta < \gamma < 1 - 2\beta$.

Es genügt zu zeigen, daß T_γ auf s_n anwendbar ist, was wegen $s_n = o((1-2\beta)^{-n})$ der Fall ist. Satz 6 und seine Verschärfung werden illustriert durch die Gebiete $\mathcal{G}'(T_\alpha)$ (vgl. 2.1.3). Ist $\beta < \gamma$, so überdeckt

$\mathfrak{G}'(T_\gamma)$ denjenigen Teil des Gebietes $\mathfrak{G}'(T_\beta)$, für dessen z -Werte T_γ auf z^n anwendbar ist. Ist $\beta < \frac{1}{2}$, so wird $\mathfrak{G}'(T_\beta)$ überdeckt von allen Gebieten $\mathfrak{G}'(T_\gamma)$, die zu Ordnungen γ mit $\beta < \gamma < 1 - 2\beta$ gehören.

2.5. Wir untersuchen nun, wie sich bei einer T_α -limitierbaren Folge eine Indexverschiebung auswirkt. Wir bezeichnen

mit t_n die T_α -Transformation der Folge $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots$,

mit t'_n die T_α -Transformation der Folge $s_1, s_2, s_3, \dots$.

T_α ist entweder auf beide Folgen oder auf keine anwendbar. Nach R. WAIS [9] folgt aus $t'_n \rightarrow s$ stets $t_n \rightarrow s$ und kann für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ umgekehrt von $t_n \rightarrow s$ auf $t'_n \rightarrow s$ geschlossen werden. Darüber hinaus beweisen wir den zusammenfassenden

Satz 8. Die T_α -Transformationen t_n und t'_n seien vorhanden. Aus $t'_n \rightarrow s$ folgt stets $t_n \rightarrow s$. Ist $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, so folgt aus $t_n \rightarrow s$ umgekehrt $t'_n \rightarrow s$. Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ist der Schluß von $t_n \rightarrow s$ auf $t'_n \rightarrow s$ sicher dann richtig, wenn $\sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v$ in $z = \alpha$ regulär ist.

Beweis. Es ist

$$t_0 = (1-\alpha) \sum_{v=1}^{\infty} \alpha^v s_v, \quad t_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} \quad \text{für } n \geq 1,$$

$$t'_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v+1} \quad \text{für } n \geq 0.$$

Daraus folgt $t_0 = \alpha t'_0$ und für $n \geq 1$

$$(2.5.1) \quad t_n = (1-\alpha) t'_{n-1} + \alpha t'_n,$$

denn in der letzten Gleichung ist die rechte Seite gleich

$$(1-\alpha)^{n+1} s_n + (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\binom{n-1+v}{v} + \binom{n-1+v}{v-1} \right] \alpha^v s_{n+v}$$

$$= (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} = t_n.$$

Aus $t'_n \rightarrow s$ folgt also $t_n \rightarrow s$.

Aus (2.5.1) ergibt sich für t'_n die Rekursionsformel

$$t'_n = \frac{\alpha-1}{\alpha} t'_{n-1} + \frac{1}{\alpha} t_n \quad (n \geq 1),$$

welche zusammen mit $t'_0 = \frac{1}{\alpha} t_0$ für $n \geq 0$ die Beziehung

$$(2.5.2) \quad t'_n = \frac{1}{\alpha} \sum_{v=0}^n \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{n-v} t_v = V t$$

liefert, wobei V eine Dreiecksmatrix mit den Elementen

$$V_{nv} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{n-v} \quad \text{für } 0 \leq v \leq n \quad (n \geq 0)$$

ist. Man zeigt leicht, daß V permanent ist für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Dann folgt aus $t_n \rightarrow s$ also $t'_n \rightarrow s$.

Nun sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und $\sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v$ für $z = \alpha$ regulär. Wenden wir auf die T_α -Transformation t_n der Folge $0, s_1, s_2, \dots$ mit $a_0 = 0$ den Satz 7 für $n = 0$ an, so ergibt sich

$$\frac{1}{1-\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^v t_v = 0.$$

Setzen wir t_n als konvergent voraus, so ist diese Reihe wegen $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ schon im gewöhnlichen Sinn konvergent, also

$$t_0 = - \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^v t_v.$$

Damit folgt aus (2.5.2) für $n \geq 0$

$$\begin{aligned} t'_n &= -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^n \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^v t_v + \frac{1}{\alpha} \sum_{v=1}^n \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{v-n} t_v \\ &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{v=n+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{v-n} t_v = W t, \end{aligned}$$

$$W = W_{nv} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq v \leq n, \\ -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{v-n} & \text{für } v > n, \end{cases} \quad (n \geq 0).$$

Die Matrix W ist für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ permanent. Aus $t_n \rightarrow s$ folgt also $t'_n \rightarrow s$.

Es bleibt noch der Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ zu erledigen. Wir setzen

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v = z g(z), \quad g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{v+1} z^v.$$

Es strebe $T_\alpha s = t_n \rightarrow s$, und es sei $f(z)$ und damit $g(z)$ in $z = \alpha$ regulär. Nach 2.2 ist dann

$$(2.5.3) \quad f\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \frac{a_{n+v}}{2^v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} x^n$$

für $|x| < 1$ regulär und bei $x = 1$ konvergent zur Summe s :

$$(2.5.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} = s.$$

Da hiernach $\frac{c_n}{2^n} \rightarrow 0$ strebt für $n \rightarrow \infty$, und das Funktionselement (2.5.3) in $x = -1$ regulär ist und daselbst verschwindet, erhält man nach einem bekannten Satz von P. FATOU⁹⁾

$$(2.5.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(-2)^n} = 0.$$

Zu beweisen ist, daß $t'_n \rightarrow s$ strebt, d. h. daß die in der Umgebung von $x = 0$ sicher vorhandene Entwicklung von $g\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)$ nach Potenzen

⁹⁾ Vgl. Enzyklopädie [1], S. 485.

von x für $x = 1$ zum Wert s konvergiert. Nun ist

$$g\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \sum_{v=0}^n \frac{c_v}{(-2)^v}.$$

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{v=0}^n \frac{c_v}{(-2)^v} = \frac{s}{2}$$

ist. Bezeichnen wir die Teilsummen dieser Reihe mit C_n , so ist für $n \geq 0$

$$C_{2n} = \sum_{v=0}^n \frac{c_{2v}}{2^{2v}}, \quad C_{2n+1} = \sum_{v=0}^n \frac{c_{2v+1}}{2^{2v+1}}.$$

Addition von (2.5.4) und (2.5.5) ergibt

$$2 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_{2v}}{2^{2v}} = s, \quad \text{d. h. } 2 C_{2n} \rightarrow s,$$

Subtraktion ergibt

$$2 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_{2v+1}}{2^{2v+1}} = s, \quad \text{d. h. } 2 C_{2n+1} \rightarrow s.$$

Damit ist Satz 8 in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

Das S_α -Verfahren.

3.1. Wir definieren nun ein neues Limitierungsverfahren, das S_α -Verfahren, das dem T_α -Verfahren zunächst mindestens äußerlich verwandt ist. Es sei wieder $0 < \alpha < 1$. Wir setzen

$$S_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \binom{n+v}{v} \alpha^v \quad (n, v \geq 0, \text{ ganz}).$$

Der Vergleich der Transformationen

$$T_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_{n+v} \quad \text{und} \quad S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_v$$

zeigt, daß die Matrix S_α dadurch entsteht, daß die Elemente einer Zeile der Matrix T_α so weit nach links geschoben werden, daß keine verschwindenden Elemente mehr auftreten.

Für eine feste Nummer $n \geq 0$ ist $\binom{n+v}{v} = \binom{v+n}{n} \cong \frac{v^n}{n!}$ bei $v \rightarrow \infty$. Genau wie in 2.1 bei T_α zeigt man daher: Für die Anwendbarkeit von S_α auf s_n ist notwendig und hinreichend die Bedingung

$$s_v = O\left(\frac{1}{v^n \alpha^v}\right) \text{ für jedes } n \geq 0 \text{ bei } v \rightarrow \infty;$$

ist sie erfüllt, so konvergieren die Reihen für $S_\alpha s$ für alle n absolut. S_α ist also genau dann auf s_n anwendbar, wenn T_α es ist. Aus der Anwendbarkeit von S_α auf s_n folgt die Konvergenz der Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für $|z| < \alpha$.

Die Matrix S_α ist positiv und, wie man leicht verifiziert, permanent: Aus $s_n \rightarrow s$ folgt $S_\alpha s \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$. Dies ist für $\alpha = 1$ enthalten in dem folgenden

Satz 9. Es sei $0 < \alpha < 1$, s beliebig, ferner $s_n \cong s \alpha^n$ für $n \rightarrow \infty$, so daß gewiß S_α auf s_n anwendbar ist. Dann gilt

$$S_\alpha s \cong \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\alpha} \right)^n.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Nummer m , so daß $|s_n - s \alpha^n| < \varepsilon \alpha^n$ ist für $n > m$. Also ist

$$\begin{aligned} \left| S_\alpha s - \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\alpha} \right)^n \right| &\leq (1-\alpha)^{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^m \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu (s_\nu - s \alpha^\nu) \right| \\ &\quad + (1-\alpha)^{n+1} \left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu (s_\nu - s \alpha^\nu) \right| \\ &\leq \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\alpha} \right)^{n+1} \left[\sum_{\nu=0}^m (1-\alpha\alpha)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} |s_\nu - s \alpha^\nu| + \varepsilon \right] \\ &< 2\varepsilon \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\alpha} \right)^{n+1} \text{ für } n > N, \end{aligned}$$

wenn N so gewählt ist, daß die zuletzt auftretende Summe, deren Glieder für jedes feste ν gegen 0 streben bei $n \rightarrow \infty$, kleiner als ε ist für $n > N$. Daraus folgt die Behauptung.

Daß das S_α -Verfahren divergente Folgen zu limitieren vermag, möge die Folge $s_n = z^n$ zeigen. S_α ist auf z^n anwendbar für $|z| < \frac{1}{\alpha}$; es ist dann

$$S_\alpha(n; z^\nu) = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha z} \right)^{n+1}.$$

Für das Gebiet $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ erhalten wir damit:

$$\mathfrak{G}'(S_\alpha) : \left| z - \frac{1}{\alpha} \right| > \frac{1-\alpha}{\alpha}, |z| < \frac{1}{\alpha}.$$

Hier zeigt sich das S_α -Verfahren dem T_α -Verfahren überlegen. Man findet unschwer, daß $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ umfassender als $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ ist. Auch die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ für α zwischen 0 und 1 ist umfassender als die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$, enthält erstere doch z. B. die BORELSche Halbebene $\mathfrak{G}'(B)$, während letztere ganz im Innern des Kreises $|z| = 3$ liegt.

3. 2. Im Gegensatz zum T_α -Verfahren läßt sich beim S_α -Verfahren die Frage der Indexverschiebung in einfacher und vollständiger Weise erledigen.

Satz 10. Ist die Folge $0, s_1, s_2, \dots$ S_α -limitierbar zum Wert s , so ist es auch die Folge $s_1, s_2, s_3, \dots$, und umgekehrt.

Beweis. Wir bezeichnen

mit t_n die S_α -Transformation der Folge $0, s_1, s_2, \dots$,

mit t'_n die S_α -Transformation der Folge $s_1, s_2, s_3, \dots$.

S_α ist entweder auf beide Folgen oder auf keine anwendbar. Der erstere Fall liege vor. Für $n \geq 0$ ist

$$t_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu, \quad t'_n = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{\nu+1},$$

ferner ist $t'_0 = \frac{t_0}{\alpha}$ und für $n \geq 1$

$$(3. 2. 1) \quad t'_n = \frac{1}{\alpha} (t_n - (1-\alpha) t_{n-1});$$

denn in der letzten Gleichung ist die rechte Seite gleich

$$\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu} \right] \alpha^\nu s_\nu = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{\nu-1} \alpha^{\nu-1} s_\nu = t'_n.$$

Aus $t_n \rightarrow s$ folgt also $t'_n \rightarrow s$.

Aus (3. 2. 1) ergibt sich für t_n die Rekursionsformel

$$t_n = (1-\alpha) t_{n-1} + \alpha t'_n,$$

welche zusammen mit $t_0 = \alpha t'_0$

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{n-\nu} t'_\nu = V t' \quad \text{für } n \geq 0$$

liefert. Die Dreiecksmatrix V mit den Elementen

$$V_{n\nu} = \alpha (1-\alpha)^{n-\nu} \quad \text{für } 0 \leq \nu \leq n \quad (n \geq 0)$$

erweist sich leicht als permanent. Aus $t'_n \rightarrow s$ folgt also $t_n \rightarrow s$.

3. 3. Wir untersuchen nun, wie sich die S_α -Transformation auswirkt, wenn wir von Folgen zu Reihen übergehen.

Die Anwendbarkeit von S_α auf s_n ist nach **3. 1** gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf s_n , also nach **2. 2** gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf a_n oder also von S_α auf a_n .

Es sei S_α auf s_n anwendbar. Wir setzen $t_n = S_\alpha s = \sum_{\nu=0}^n b_\nu$ für $n \geq 0$ und wollen die b_n in den a_n ausdrücken. Es ist

$$b_0 = t_0 = (1-\alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu a_\nu = a_0 + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

und für $n \geq 1$

$$b_n = t_n - t_{n-1} = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} s_{\nu} - (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n-1+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} s_{\nu},$$

$$\frac{b_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu} \right] \alpha^{\nu} s_{\nu} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} s_{\nu}.$$

Die eckige Klammer in der ersten Summe verschwindet für $\nu = 0$ und ist gleich $\binom{n+\nu-1}{\nu-1}$ für $\nu \geq 1$, also ist

$$\frac{b_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_{\nu} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu+1},$$

$$b_n = \alpha (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu+1}.$$

Für $n \geq 0$ ist somit

$$t_n = a_0 + \alpha \sum_{\mu=0}^n (1-\alpha)^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu+1},$$

und daher die Aussage $S_{\alpha}\text{-}\lim s_n = s$ gleichwertig mit der Aussage

$$a_0 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu+1} = s.$$

Nun sei die Folge $s_0, s_1, s_2, \dots$, S_{α} -limitierbar zum Wert s ; dann ist es auch die Folge $0, s_0, s_1, \dots$ und umgekehrt. Wenden wir auf die zweitgenannte Folge unser soeben erhaltenes Ergebnis an, so bekommen wir

Satz 11. Die Anwendbarkeit von S_{α} auf s_n ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von S_{α} auf a_n . Die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\alpha}(n; s_{\nu}) = s$ ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} S_{\alpha}(n; a_{\nu}) = s.$$

Die Sätze 3 und 11 zeigen, daß sich die Verfahren T_{α} und S_{α} beim Übergang von Folgen zu Reihen ganz ähnlich verhalten wie das E_p -Verfahren ($p > 0$). Die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} E_p(n; s_{\nu}) = s$ ist nämlich (vgl. [3]) gleichbedeutend mit der Aussage

$$\frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pn}} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} a_{\nu} = \frac{1}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} E_p(n; a_{\nu}) = s.$$

3. 4. Wir untersuchen nun, wie sich zwei S-Verfahren verschiedener Ordnung zueinander verhalten.

Ist $0 < \beta < \gamma < 1$, so sind die Verfahren S_β und S_γ nicht miteinander vergleichbar, d. h. es gibt Folgen, die S_β , aber nicht S_γ -limitierbar sind, und umgekehrt auch Folgen, die S_γ , aber nicht S_β -limitierbar sind. Das zeigen die sich überschneidenden Kreisbogenzweiecke $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ und $\mathfrak{G}'(S_\gamma)$. Es ist also ohne Einschränkung keinesfalls möglich, die Verfahren S_α im Sinne wachsender Stärke zu ordnen. Dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ jedoch, dessen z -Werte so beschaffen sind, daß S_γ auf z^n anwendbar ist, nämlich der Durchschnitt von $\mathfrak{G}'(S_\beta)$ mit dem Kreis $|z| < \frac{1}{\gamma}$, liegt ganz innerhalb von $\mathfrak{G}'(S_\gamma)$. Es könnte also, in Analogie zu den Verhältnissen beim T_α -Verfahren, sein, daß das S_γ -Verfahren stärker ist als das S_β -Verfahren für solche Folgen, auf die sich beide Verfahren anwenden lassen. Der naheliegende Versuch, dies durch Iteration von S_α -Verfahren zu beweisen, führt zu nichts. Dagegen kommt man durch Kombination des S_α -Verfahrens mit dem TAYLORSchen Verfahren zum Ziel.

Satz 12. Es sei $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ und $\frac{\beta}{1-\alpha(1-\beta)} = \gamma$ gesetzt, so daß $\beta < \gamma < 1$ ist. Dann gilt

$$(3.4.1) \quad T_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$

Beweis. Für $n, v, \mu \geq 0$ ist

$$\binom{\mu+v}{v} \binom{\mu}{n} = \binom{\mu+v}{v+n} \binom{v+n}{n},$$

also für $n, v \geq 0$

$$\begin{aligned} T_\alpha S_\beta &= \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^\nu}{\alpha^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} \binom{\mu+v}{v} \alpha^\mu (1-\beta)^\mu \\ &= \binom{n+v}{v} \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^\nu}{\alpha^n} \sum_{\mu=n}^{\infty} \binom{\mu+v}{v+n} \alpha^\mu (1-\beta)^\mu \\ &= \binom{n+v}{v} (1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^{n+1} \beta^\nu \sum_{\eta=0}^{\infty} \binom{n+v+\eta}{\eta} \alpha^\eta (1-\beta)^\eta \\ &= \binom{n+v}{v} \frac{(1-\alpha)^{n+1} (1-\beta)^{n+1} \beta^\nu}{(1-\alpha+\alpha\beta)^{n+\nu+1}} = \binom{n+v}{v} (1-\gamma)^{n+1} \gamma^\nu = S_\gamma. \end{aligned}$$

Folgerung. Es sei $0 < \beta < \gamma < 1$, $0 < \alpha < \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$ und S_γ auf s_n anwendbar, so daß gewiß auch S_β auf s_n anwendbar ist. Weiter sei $S_\beta s \cong s\alpha^n$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist

$$S_\gamma s \cong \frac{\beta(1-\gamma)s}{\gamma(1-\beta)-\alpha(\gamma-\beta)} \left[\frac{\beta(1-\gamma)\alpha}{\gamma(1-\beta)-\alpha(\gamma-\beta)} \right]^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha = \frac{\gamma-\beta}{\gamma(1-\beta)}$. Dann können wir Satz 12 anwenden und nach Satz 1, da $S_\gamma|s|$ existiert für alle n , von (3.4.1) zu der Gleichung $S_\gamma s = T_\alpha(S_\beta s)$ übergehen. Die Behauptung ergibt

sich nun aus Satz 2. Insbesondere dürfen wir $a = 1$ setzen und erhalten damit den folgenden $S_\beta \rightarrow S_\gamma$ -Satz:

Satz 13. Es sei $0 < \beta < \gamma < 1$, $S_\beta\text{-lim } s_n = s$ und S_γ auf s_n anwendbar. Dann ist $S_\gamma\text{-lim } s_n = s$.

Mit der durch diesen Satz gegebenen Einschränkung ist also das S_α -Verfahren umso stärker, je größer seine Ordnung α ist. Speziell ergibt sich aus Satz 13, daß die S -Verfahren aller Ordnungen miteinander verträglich sind.

3. 5. Neben der Beziehung (3. 4. 1) besteht noch ein weiterer Zusammenhang zwischen den T - und S -Verfahren, der durch das EULER-KNOPPSche Verfahren vermittelt wird.

Satz 14. Es sei $0 < \alpha < 1$ und $\alpha = \frac{1}{2^p}$, so daß $p > 0$ ist. Dann gilt

$$S_\alpha = E_p T_\alpha.$$

Beweis. Für $n, v \geq 0$ hat man

$$E_p T_\alpha = \frac{(2^p - 1)^n \alpha^v}{2^{pn}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} \binom{v}{\mu} \frac{(1-\alpha)^{\mu+1}}{\alpha^\mu (2^p - 1)^\mu} = (1-\alpha)^{n+1} \alpha^v \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} \binom{v}{\mu}.$$

Auf Grund des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten ist aber

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} \binom{v}{\mu} = \sum_{\mu=0}^v \binom{n}{\mu} \binom{v}{v-\mu} = \binom{n+v}{v},$$

also

$$E_p T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1} \alpha^v \binom{n+v}{v} = S_\alpha.$$

Aus dem Satz 14 ergibt sich eine Reihe von Folgerungen. Zunächst gestattet er, aus dem Verhalten der T_α -Mittel einer Folge auf das Verhalten der S_α -Mittel zu schließen. Analog den Sätzen 2 und 9 beweist man unschwer: Ist $a > 0$ und $s_n \cong s a^n$ für $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$E_p s \cong s \left(\frac{2^p - 1 + \alpha}{2^p} \right)^n.$$

Nun sei T_α auf eine Folge s_n anwendbar. Wie wir wissen, ist dies gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von S_α auf s_n . Nach Satz 1 und 14 ist dann $S_\alpha s = E_p(T_\alpha s)$ mit $2^{-p} = \alpha$, und man bekommt:

Es sei $a > 0$, T_α und damit S_α auf s_n anwendbar und $T_\alpha s \cong s a^n$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$S_\alpha s \cong s(1 - \alpha + \alpha a)^n.$$

Für $a = 1$ ergibt sich insbesondere der $T_\alpha \rightarrow S_\alpha$ -Satz:

Satz 15. Aus $T_\alpha\text{-lim } s_n = s$ folgt $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$.

Alle T - und S -Verfahren sind daher miteinander verträglich. Denn ist $T_\alpha\text{-lim } s_n = s$ und $S_\beta\text{-lim } s_n = s'$, so ist auch $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$, also wegen der Verträglichkeit der S -Verfahren untereinander $s = s'$. Satz 15 wird illustriert durch die schon früher erwähnte Tatsache, daß das Gebiet $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ durch das Gebiet $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ überdeckt wird.

Des weiteren gestattet der Satz 14 die Aufstellung von Umkehrformeln der S_α -Transformation. S_α sei auf s_n anwendbar und $2^{-p} = \alpha$. Dann ist

$$t_n = S_\alpha s = E_p(T_\alpha s).$$

Die Umkehrung der E_p -Transformation ist bekannt. Aus $\tau_n = E_p(n; \sigma_v)$ für eine Folge σ_n folgt

$$\sigma_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu} 2^{p\nu} \tau_\nu.$$

Dies liefert

$$T_\alpha s = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{t_\nu}{(\alpha - 1)^\nu}.$$

Verlangen wir jetzt noch, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bei $z = \alpha$ regulär ist, so können wir den Satz 7 heranziehen und erhalten für $n \geq 0$

$$s_n = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)\alpha^n} \sum_{\nu=0}^{\infty} {}' \binom{n+\nu}{\nu} \sum_{\mu=0}^{n+\nu} \binom{n+\nu}{\mu} \frac{t_\mu}{(\alpha-1)^\mu},$$

wobei unter $\sum'$ die sicher vorhandene BOREL-Summe der Reihe zu verstehen ist.

3. 6. Vor allem ergibt sich aus Satz 14 eine funktionentheoretische Deutung des S_α -Verfahrens in den Fällen, in denen wir eine solche für das T_α -Verfahren kennen. Um sie zu erhalten, formulieren wir zunächst das EULER-KNOPFSche Verfahren in seiner funktionentheoretischen Fassung¹⁰⁾: Dann und nur dann ist $E_p\text{-lim } s_n = s$, wenn das Funktionselement

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

einen positiven Konvergenzradius r hat und die Entwicklung der somit in der Umgebung der Stelle $w = 0$ definierten Funktion

$$h(w) = g\left(\frac{w}{2^p - (2^p - 1)w}\right)$$

nach Potenzen von w für $w = 1$ zum Wert s konvergiert. Stets stimmt im Falle $r > 0$ die Folge der Teilsummen der Entwicklung von $h(w)$ für $w = 1$ mit der Folge $E_p s$ überein.

Nun sei $0 < \alpha < 1$, $p > 0$, T_α auf s_n anwendbar und

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

für $z = \alpha$ regulär. Setzen wir (vgl. 2. 2)

$$g(x) = f(\alpha + (1-\alpha)x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{T_\alpha a}{1-\alpha},$$

¹⁰⁾ Vgl. K. KNOPP [5], S. 325.

so ist $g(x)$ bei $x = 0$ regulär und $T_\alpha s$ die Folge der Teilsummen der rechts stehenden Reihe für $x = 1$. Anwendung des kombinierten Verfahrens $E_p T_\alpha$ auf s_n bedeutet daher nach unserer Vorbemerkung über das E_p -Verfahren Übergang zu der Funktion

$$h(w) = g\left(\frac{w}{2^p - (2^p - 1)w}\right) = f\left(\alpha + \frac{(1-\alpha)w}{2^p - (2^p - 1)w}\right)$$

und Untersuchung, ob ihre in der Umgebung von $w = 0$ sicher vorhandene Entwicklung nach Potenzen von w für $w = 1$ konvergiert. Ist Konvergenz zur Summe s vorhanden, so ist dies gleichbedeutend mit der Aussage $E_p(T_\alpha s) = (E_p T_\alpha)s \rightarrow s$. Nehmen wir speziell den Fall $2^p = \alpha$, so bekommen wir

Satz 16. S_α sei auf s_n anwendbar und $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für $z = \alpha$ regulär. Dann stimmt die Folge der Teilsummen der in der Umgebung von $w = 0$ sicher vorhandenen Entwicklung der Funktion

$$h(w) = f\left(\frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)w}\right)$$

nach Potenzen von w für $w = 1$ überein mit der Folge $S_\alpha s$, so daß also dann und nur dann $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $w = 1$ zum Wert s konvergiert.

Man kann diesem Zusammenhang — unabhängig von einer Anwendbarkeits- und Regularitätsvoraussetzung — noch in rein formaler Hinsicht nachgehen und die S_α -Transformation einer Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ nach

folgender Vorschrift bilden. Man führe in $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für z die Reihe

$$z = \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)w} = \alpha \sum_{v=0}^{\infty} (1-\alpha)^v w^v$$

ein, entwickle formal nach Potenzen von w und setze sodann $w = 1$. In der Tat entsteht aus

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v \frac{\alpha^v}{[1 - (1-\alpha)w]^v} = a_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{[1 - (1-\alpha)w]^{\mu+1}}$$

zunächst die Reihe

$$a_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu+1} \alpha^{\mu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu+n}{n} (1-\alpha)^n w^n,$$

und aus ihr durch formales Umordnen nach Potenzen von w die Reihe

$$a_0 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n w^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n+\mu}{\mu} \alpha^\mu a_{\mu+1},$$

deren Teilsummen für $w = 1$ nach 3.3 die Glieder der Folge $S_\alpha s$ sind. Dies zeigt, daß sich das S_α -Verfahren mit

$$E(w) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)w}$$

unter die von K. KNOPP [5] betrachteten verallgemeinerten EULERSchen Reilentransformationen (vgl. 2.2) einordnen läßt. Allerdings besitzt das Gebiet

$$\mathfrak{G}(S_\alpha): \left| z - \frac{1}{2 - \alpha} \right| < \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha}$$

der z -Ebene, in welches das Gebiet $|w| < 1$ durch die Abbildung $z = E(w)$ übergeht, nicht die für eine erzeugende Figur erforderlichen Eigenschaften.

Wir wollen die funktionentheoretische Seite des S_α -Verfahrens noch auf eine zweite Weise formulieren. Dazu setzen wir

$$a = \frac{1}{2 - \alpha},$$

so daß $\frac{1}{2} < a < 1$ ist. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(S_\alpha)$ das Innere eines den Kreis $|z| = 1$ in $z = 1$ von innen berührenden Kreises. Der Punkt $z = \alpha$ liegt in $\mathfrak{G}$, und zwar links vom Kreismittelpunkt $z = a$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}$ die lineare Abbildung, die $\mathfrak{G}$ so auf sich selbst abbildet, daß die auf der reellen Achse gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}$ Fixpunkte bilden und $z = \alpha$ in $z = a$ übergeht, daß also

$$\text{die Punkte } z = 2a - 1, \alpha, 1$$

$$\text{bezüglich in die Punkte } z = 2a - 1, a, 1$$

übergehen. Die Umkehrung $\mathfrak{L}^{(-1)}$ dieser Abbildung wird vermittelt durch die Funktion

$$l^{(-1)}(z) = \frac{\alpha}{2 - (2 - \alpha)z}.$$

Nun sei S_α auf s_n anwendbar und $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ bei $z = \alpha$ regulär. Dann ist die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}$ aus $f(z)$ durch Mitabbilden entstehende Funktion

$$\bar{f}(z) = f(l^{(-1)}(z))$$

bei $z = a$ regulär. Ist h die im Satz 16 auftretende Funktion, so hat man in der Umgebung der Stelle $y = 0$

$$\bar{f}(a + y) = h\left(\frac{y}{1 - a}\right).$$

Nun ist aber die Aussage $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$ gleichbedeutend damit, daß die Entwicklung der Funktion $h(w)$ nach Potenzen von w für $w = 1$ zum Wert s konvergiert, also ist sie gleichbedeutend damit, daß die Entwicklung der Funktion $\bar{f}(a + y)$ nach Potenzen von y für $y = 1 - a$

zum Wert s konvergiert. Die letztgenannte Konvergenz bedingt die Regularität von $\bar{f}(a+y)$ für $|y| < 1-a$, also die Regularität von $\bar{f}(z)$ und damit von $f(z)$ in $\mathfrak{G}$. Als Ergebnis formulieren wir

Satz 17¹¹⁾. S_α sei auf s_n anwendbar und $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ bei $z = \alpha$ regulär. Dann und nur dann ist $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$, wenn sich $f(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ hinein analytisch fortsetzen läßt, so daß also auch die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}$ aus $f(z)$ entstehende Funktion $\bar{f}(z)$ in $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ regulär ist, und wenn die somit für $|y| < 1-a$ konvergente Entwicklung der Funktion $\bar{f}(a+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-a$ zum Wert s konvergiert.

§ 4.

Der Zusammenhang der Verfahren T_α und S_α mit den Verfahren E_p und B .

4.1. Wie die in 3.1 und 1.2 betrachteten Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(B)$ zeigen, sind die Verfahren S_α und B nicht miteinander vergleichbar. Dennoch besteht zwischen beiden ein enger Zusammenhang. Um ihn herzustellen, nehmen wir an, S_α sei auf s_n anwendbar. Da dann $\sum_{v=0}^{\infty} s_v x^v$ einen positiven Konvergenzradius hat, ist gewiß $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{s_v x^v}{v!}$ beständig konvergent. Es konvergiert also

$$S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_v \text{ für } n \geq 0,$$

$$Bs = b(x) = e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} s_v \text{ für } x \geq 0.$$

¹¹⁾ Ein analoger Satz läßt sich für das ETLER-KNOPPSche Verfahren aufstellen. Wir setzen

$$a_1 = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1},$$

so daß $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ bei $p > 0$ ist, und verstehen unter $\mathfrak{L}_1$ die lineare Abbildung, die das Gebiet

$$\mathfrak{G}(E_p): |z - a_1| < 1 - a_1$$

der z -Ebene so auf sich selbst abbildet, daß die auf der reellen Achse gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}(E_p)$ Fixpunkte bilden und $z = 0$ in den Mittelpunkt $z = a_1$ von $\mathfrak{G}(E_p)$ übergeht. Dann gilt:

Dann und nur dann ist $E_p\text{-lim } s_n = s$, wenn das Funktionselement $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$

einen positiven Konvergenzradius hat und sich in das Gebiet $\mathfrak{G}(E_p)$ hinein analytisch fortsetzen läßt, so daß also auch die bei Vornahme der Abbildung $\mathfrak{L}_1$ aus $f(z)$ entstehende Funktion $\bar{f}_1(z)$ in $\mathfrak{G}(E_p)$ regulär ist, und wenn die somit für $|y - a_1| < 1 - a_1$ konvergente Entwicklung der Funktion $\bar{f}_1(a_1 + y)$ nach Potenzen von y für $y = 1 - a_1$ zum Wert s konvergiert.

Nun ist nach BOREL mit

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v = c \text{ auch } \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} c_v \right) dx = c.$$

Also können wir schreiben

$$S_\alpha s = (1-\alpha)^{n+1} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+n}{n} \frac{\alpha^v x^{v+n}}{v!} s_v \right] dx.$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \left[e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} (v+n) \dots (v+2) \frac{\alpha^v x^{v+1}}{v!} s_v \right]_0^A \right. \\ \left. + \int_0^A e^{-x} \left[\sum_{v=0}^{\infty} (v+n) \dots (v+2) \frac{\alpha^v x^{v+1}}{v!} s_v \right] dx \right\}.$$

Wegen der Anwendbarkeit von S_α auf s_n gibt es zu einer festen Nummer n eine Schranke M , so daß

$$|s_v| < \frac{\alpha^{-v} M}{(v+1)(v+2) \dots [(v+n) \dots (v+2)]} \quad \text{für } v \geq 0$$

ist. Damit bekommt man

$$\left| e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} (v+n) \dots (v+2) \frac{\alpha^v x^{v+1}}{v!} s_v \right| \leq M e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{v+1}}{(v+2)!} \\ = \frac{M(e^x - 1 - x)}{x e^x} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty,$$

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} \left[\sum_{v=0}^{\infty} (v+n) \dots (v+2) \frac{\alpha^v x^{v+1}}{v!} s_v \right] dx.$$

Integriert man in derselben Weise noch $(n-1)$ -mal partiell, so ergibt sich

$$S_\alpha s = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v x^{v+n}}{v!} s_v \right] dx \\ = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-(1-\alpha)x} b(\alpha x) dx \\ = \frac{w^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-wx} b(x) dx \quad \text{mit } w = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Damit liegt der Weg offen, um von den B -Mitteln der Folge s_n auf ihre S_α -Mittel zu schließen:

Es sei $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < \frac{1-\alpha}{\alpha}$, S_α auf s_n anwendbar und $b(x) \cong s e^{ax}$ für $x \rightarrow \infty$. Dann ist

$$S_\alpha s \cong \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha-\alpha a} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha a} \right)^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Voraussetzung gibt es nämlich zu $\varepsilon > 0$ ein $y > 0$, so daß $|b(x) - s e^{ax}| < \varepsilon e^{ax}$ ist für $x \geq y$, und weiter, wenn $|b(x) - s e^{ax}| < M$ ist für $0 \leq x \leq y$, eine Nummer N , so daß

$$\frac{M(w-a)^{n+1} y^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

ist für $n > N$. Beachtet man die Beziehung

$$\frac{1}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-(w-a)x} dx,$$

so erhält man für $n > N$

$$\begin{aligned} & \left| S_x s - s \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1} \right| \\ & \leq \frac{w^{n+1}}{n!} \left| \int_0^y x^n e^{-wx} (b(x) - s e^{ax}) dx \right| + \frac{w^{n+1}}{n!} \left| \int_y^\infty x^n e^{-wx} (b(x) - s e^{ax}) dx \right| \\ & \leq \frac{w^{n+1}}{n!} M \int_0^y x^n dx + \frac{w^{n+1}}{n!} \varepsilon \int_0^\infty x^n e^{-(w-a)x} dx \\ & \leq \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1} \left[\frac{M(w-a)^{n+1} y^{n+1}}{(n+1)!} + \varepsilon \right] < 2\varepsilon \left(\frac{w}{w-a} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. Für $a = 0$ ergibt sich

Satz 18. *Es sei $B\text{-}\lim s_n = s$ und S_α auf s_n anwendbar. Dann ist $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$.*

Die oben aufgetretene, bei festem $w > 0$ einer Funktion $f(x)$ die Folge

$$\frac{w^{n+1}}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-wx} f(x) dx$$

zuordnende Integraltransformation ist für sich interessant und soll in einer gesonderten Untersuchung behandelt werden.

4. 2. Der $B \rightarrow S_\alpha$ -Satz 18 läßt verschiedene Anwendungen zu. Zunächst einmal hat er die Verträglichkeit der Verfahren S_α und B zur Folge. Wegen des $E_p \rightarrow B$ -Satzes und des $T_\alpha \rightarrow S_\alpha$ -Satzes folgt daraus die Verträglichkeit der Verfahren S_α und E_p , ebenso der Verfahren T_α und E_p und schließlich der Verfahren T_α und B . Es gilt daher der zusammenfassende

Satz 19. *Die sämtlichen Verfahren E_p ($p > 0$), B , S_α ($0 < \alpha < 1$) und T_β ($0 < \beta < 1$) sind miteinander verträglich¹²⁾.*

¹²⁾ Auf die Beziehung der Verfahren T_α und S_α zu den CESAROSCHEN C_k -Verfahren ($k > 0$) und zum ABELSCHEN A -Verfahren gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Es sei jedoch erwähnt, daß wir die Verfahren C_k und A zu den im Satz 19 aufgezählten Verfahren hinzunehmen dürfen. Wegen Satz 4 gilt nämlich der folgende $T_\alpha \rightarrow A$ -Satz: Ist $T_\alpha \cdot \sum a_n = s$ und hat die Reihe $\sum a_n z^n$ den Konvergenzradius 1, so ist $A \cdot \sum a_n = s$. Ein analoger $S_\alpha \rightarrow A$ -Satz ergibt sich aus Satz 17.

Weiter lehrt Satz 18, daß das S_α -Verfahren bei Anwendung auf Potenzreihen mehr als das B -Verfahren zu leisten vermag, sofern alle Ordnungen α zwischen 0 und 1 herangezogen werden. Denn hat $\sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ einen positiven Konvergenzradius ϱ , so ist die S_α -Transformation dieser Reihe vorhanden, wenn nur α genügend klein genommen wird; in diesen Fällen folgt aus der B -Summierbarkeit die S_α -Summierbarkeit. Daß aber S_α tatsächlich mehr als B liefern kann, zeigt schon die geometrische Reihe. Beschränkt man sich auf ein festes α , so leistet S_α wenigstens im Kreis $|z| < \varrho/\alpha$ mehr als B .

Wir kombinieren nun die Sätze 17 und 18. Das Funktionselement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den positiven Konvergenzradius r und es sei $B\text{-}\lim s_n = s$. Für genügend kleines α ist dann S_α auf s_n anwendbar, also $S_\alpha\text{-}\lim s_n = s$. Damit gelten die durch die eine Hälfte von Satz 17 sichergestellten Tatsachen. Insbesondere ist $f(z)$ in $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ regulär. Für $\alpha \rightarrow 0$ geht aber $\mathfrak{G}(S_\alpha)$ in den Kreis $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ über. Also ist $f(z)$ in diesen Kreis analytisch fortsetzbar. — Es folgt die von E. PHRAGMÉN¹³⁾ festgestellte Tatsache, daß eine Potenzreihe in einem außerhalb ihres BORELSchen Summabilitätspolygons gelegenen Punkt nicht B -summierbar ist. Das Funktionselement $F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ besitze einen positiven Konvergenzradius. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen: Ist $B\text{-}\sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v$ vorhanden für $z = z_0 \neq 0$, so ist $F(z)$ im Innern des über der Strecke $0 \dots z_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreises regulär. Für den Sonderfall $z_0 = 1$ folgt dies aus unserer soeben angestellten Betrachtung. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Anwendung des Sonderfalles auf das Funktionselement $G(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z_0^v z^v = F(z_0 z)$.

Schließlich verknüpfen wir die Sätze 14 und 18 miteinander. Der einfachen Formulierung halber beschränken wir uns dabei auf ein Funktionselement $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ vom Konvergenzradius 1. Es sei für ein solches $B\text{-}\sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$; dann ist für jedes $\alpha = 2^{-p}$ mit $0 < \alpha < 1$, $p > 0$ die Entwicklung der Funktion $f(\alpha + y)$ nach Potenzen von y an der Stelle $y = 1 - \alpha$ durch das E_p -Verfahren summierbar zum Wert s . Wir haben damit eine Ergänzung des schon in der Einleitung genannten Satzes von M. RIESZ (vgl. 5. 1). Nach dessen einer Hälfte folgt aus $B\text{-}\sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$ und $s_n = o(\sqrt[n]{n})$, daß die für $y = \frac{1}{2}$ genommene Entwicklung von $f(\frac{1}{2} + y)$ konvergiert zur Summe s . Verlangen wir nun

¹³⁾ Vgl. Enzyklopädie [1], S. 455.

statt $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ nur, daß $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für $|z| < 1$ konvergiert, so ist die bei $y = 1 - \alpha$ genommene Entwicklung von $f(\alpha + y)$ wenigstens noch E_p -summierbar zum Wert s , speziell also die für $y = \frac{1}{2}$ genommene Entwicklung von $f(\frac{1}{2} + y)$ zwar nicht mehr notwendig konvergent, aber doch wenigstens E_1 -summierbar. Die benötigte Ordnung des E -Verfahrens ist umso niedriger, je weiter draußen die Entwicklungsstelle liegt.

4. 3. Vergleichen wir die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(E_p)$, so stellen wir fest, daß $\mathfrak{G}'(E_p)$ überdeckt wird von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$, wenn $0 < \alpha \leq \frac{1}{2^{p+1}-1}$ ist, daß sich die beiden Gebiete jedoch überschneiden, wenn $\frac{1}{2^{p+1}-1} < \alpha < 1$ ist. Immer aber liegt dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{G}'(E_p)$, dessen z -Werte so beschaffen sind, daß S_α auf z^n anwendbar ist, innerhalb von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$. Diese Verhältnisse finden im folgenden ihre Erklärung.

Satz 20. *Es sei $0 < \alpha < 1$, $p > 0$ und $\frac{\alpha}{\alpha + 2^p(1-\alpha)} = \beta$ gesetzt, so daß $0 < \beta < \alpha$ ist. Dann gilt*

$$S_\alpha E_p = S_\beta.$$

Beweis. Für $n, v, \mu \geq 0$ ist

$$\binom{n+\mu}{\mu} \binom{\mu}{v} = \binom{\mu+n}{n+v} \binom{n+v}{v},$$

also für $n, v \geq 0$

$$\begin{aligned} S_\alpha E_p &= \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{(2^p-1)^v} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n+\mu}{\mu} \binom{\mu}{v} \frac{\alpha^\mu (2^p-1)^\mu}{2^{p\mu}} \\ &= \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{(2^p-1)^v} \binom{n+v}{v} \sum_{\mu=v}^{\infty} \binom{\mu+n}{n+v} \frac{\alpha^\mu (2^p-1)^\mu}{2^{p\mu}} \\ &= \frac{(1-\alpha)^{n+1} \alpha^v}{2^{pv}} \binom{n+v}{v} \sum_{\eta=0}^{\infty} \binom{n+v+\eta}{v+\eta} \frac{\alpha^\eta (2^p-1)^\eta}{2^{p\eta}} \\ &= \binom{n+v}{v} \frac{(1-\alpha)^{n+1} \alpha^v 2^{p(n+1)}}{(2^p-2^p\alpha + \alpha)^{n+v+1}} = \binom{n+v}{v} (1-\beta)^{n+1} \beta^v = S_\beta. \end{aligned}$$

Wir sind damit in der Lage, aus dem Verhalten der E_p -Mittel einer Folge auf dasjenige ihrer S_β -Mittel zu schließen:

Es sei $0 < \beta < 1$, $p > 0$, $0 < \alpha < \frac{1-\beta+2^p\beta}{2^p\beta}$, S_β auf s_n anwendbar und $E_p s \cong s a^n$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist

$$S_\beta s \cong \frac{(1-\beta)s}{1-\beta+2^p\beta-2^p\beta\alpha} \left[\frac{1-\beta}{1-\beta+2^p\beta-2^p\beta\alpha} \right]^n.$$

Zum Beweis setzen wir $\alpha = \frac{2^p\beta}{1-\beta+2^p\beta}$ und wenden nacheinander die Sätze 20, 1 und 9 an.

Insbesondere dürfen wir $\alpha = 1$ setzen. Schreiben wir α anstatt β , so ergibt sich: Aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ folgt $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$ dann, wenn S_α auf s_n anwendbar ist. Nun ist für $E_p\text{-lim } s_n = s$ die Bedingung $s_n = o((2^{p+1}-1)^n)$ notwendig¹⁴⁾. Auf eine ihr genügende Folge ist S_α anwendbar, wenn $\alpha < \frac{1}{2^{p+1}-1}$ ist. In diesem Fall folgt also aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ allein, daß $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$ ist. Aber auch nur in diesem Fall, denn daß die beiden Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2^{p+1}-1}$ unvergleichbar sind, sahen wir oben schon. Es bleibt noch der Grenzfall $\alpha = \frac{1}{2^{p+1}-1}$ zu untersuchen. Daß es dann S_α -limitierbare Folgen gibt, die nicht E_p -limitierbar sind, zeigen die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ und $\mathfrak{G}'(E_p)$. Wir geben noch umgekehrt eine Folge an, die in dem fraglichen Fall E_p -, aber nicht S_α -limitierbar ist. Aus $E_p s = t_n$ folgt

$$s_n = (-1)^n \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} 2^{pv} t_v.$$

Setzen wir $t_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, so ist $E_p\text{-lim } s_n = 0$, jedoch

$$\begin{aligned} |s_n| &= \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} \frac{2^{pv}}{v+1} \\ &\geq \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} 2^{pv} = \frac{(2^{p+1}-1)^n}{n+1} = \frac{\alpha^{-n}}{n+1}, \end{aligned}$$

das S_α -Verfahren also auf s_n nicht anwendbar. Zusammenfassend gilt

Satz 21. Aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ folgt $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$, wenn $\alpha(2^{p+1}-1) < 1$ ist. Ist $\alpha(2^{p+1}-1) \geq 1$, so sind die Verfahren E_p und S_α unvergleichbar. Jedoch folgt aus $E_p\text{-lim } s_n = s$ stets dann $S_\alpha\text{-lim } s_n = s$, wenn S_α auf s_n anwendbar ist.

Daraus ergibt sich nochmals die schon im Satz 19 festgestellte Tatsache, daß die Verfahren E_p und S_α miteinander verträglich sind.

Die bisherigen Ergebnisse lassen es berechtigt erscheinen, die Verfahren S_α bei wachsendem Index als eine Fortsetzung der Reihe der immer stärkeren Verfahren $E_p \dots B$ über B hinaus anzusprechen. Zu dem $E_p \rightarrow E_q$ -Satz für $p < q$ und dem $E_p \rightarrow B$ -Satz treten der $S_\beta \rightarrow S_\alpha$ -Satz für $0 < \beta < \alpha < 1$, der $E_p \rightarrow S_\alpha$ -Satz und der $B \rightarrow S_\alpha$ -Satz, bei denen allerdings die Anwendbarkeit von S_α auf die fragliche Folge vorausgesetzt werden muß. Ferner setzen die Gebiete $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$ die Reihe der Gebiete $\mathfrak{G}'(E_p) \dots \mathfrak{G}'(B)$ fort. Wiederum ist zu der Kennzeichnung $z - \frac{1}{\alpha} \Big| > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ von $\mathfrak{G}'(S_\alpha)$, wie sie zunächst im Hinblick auf $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(B)$ nur erwartet werden mag, eine Einschränkung (nämlich $|z| < \alpha^{-1}$) zu machen. Daß aber überhaupt eine Einschränkung statt-

¹⁴⁾ Vgl. K. KNOPP [4], S. 134.

finden muß, ist natürlich, denn die Folge z^n kann durch eine positive reguläre Matrixtransformation für reelles $z > 1$ nicht zu einem endlichen Wert limitiert werden.

4. 4. Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen dem TAYLORschen und dem EULER-KNOPPSchen Verfahren her und gehen dabei aus von der Frage, ob die Matrizen T_α und E_p miteinander vertauschbar sind. Sie sind es nicht, wie am einfachsten ein Beispiel zeigt.

Es sei $0 < \alpha, \beta < 1$; $p, q > 0$ und s_n die Folge $1, 0, 0, \dots$. Dann ist für $n \geq 0$

$$(T_\alpha E_p)s = T_\alpha(E_p s) = \frac{2^p(1-\alpha)}{2^p(1-\alpha)+\alpha} \left(\frac{(1-\alpha)(2^p-1)}{2^p(1-\alpha)+\alpha} \right)^n,$$

$$(E_q T_\beta)s = E_q(T_\beta s) = (1-\beta) \left(\frac{2^q-1}{2^q} \right)^n.$$

Soll also $T_\alpha E_p = E_q T_\beta$ sein, so muß notwendig

$$1-\beta = \frac{2^p(1-\alpha)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}, \quad \frac{2^q-1}{2^q} = \frac{(1-\alpha)(2^p-1)}{2^p(1-\alpha)+\alpha}$$

oder

$$(4. 4. 1) \quad \beta = \frac{\alpha}{2^p(1-\alpha)+\alpha}, \quad 2^q = 2^p(1-\alpha)+\alpha$$

sein. Sieht man α und p als gegeben an und bestimmt β und q durch (4. 4. 1), so ist $0 < \beta < \alpha$ und $0 < q < p$. Es kann also weder $\beta = \alpha$ noch $q = p$ sein, d. h. es ist sicher $T_\alpha E_p \neq E_p T_\alpha$. Die Bedingungen (4. 4. 1) sind nun aber nicht nur notwendig für $T_\alpha E_p = E_q T_\beta$, sondern auch hinreichend:

Satz 22. Es sei $0 < \alpha < 1$, $p > 0$, und β und q seien durch (4. 4. 1) bestimmt, so daß $0 < \beta < \alpha$ und $0 < q < p$ ist. Dann gilt

$$(4. 4. 2) \quad T_\alpha E_p = E_q T_\beta.$$

Beweis. Wir schicken dem Beweis die folgende Bemerkung voran. Sind $A = a_{nv}$ und $B = b_{nv}$ reguläre Matrizen, und ist $w > 0$, so folgt aus $E_w A = E_w B$, daß $A = B$ ist. Die Beziehung $E_w A = E_w B$ besagt nämlich

$$(4. 4. 3) \quad \sum_{\mu=0}^n \binom{n}{\mu} \frac{a_{\mu v}}{(2^w-1)^\mu} = \sum_{\mu=0}^n \binom{n}{\mu} \frac{b_{\mu v}}{(2^w-1)^\mu} \quad \text{für } n, v \geq 0.$$

Bei festem v ergeben sich aber aus dem unendlichen Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=0}^n \binom{n}{\mu} \frac{a_{\mu v}}{(2^w-1)^\mu} = c_{nv} \quad (n \geq 0)$$

die a_{nv} sukzessiv in eindeutiger Weise. Aus (4. 4. 3) folgt daher $a_{nv} = b_{nv}$.

Der Beweis der Formel (4. 4. 2) ergibt sich nun sehr einfach aus den Sätzen 20 und 14 und der Beziehung $E_u E_v = E_{u+v}$. Zunächst ist

$$S_\alpha E_p = S_\beta.$$

Setzen wir $2^w = \frac{1}{\alpha}$, so ist $w > 0$ und $2^{w+q} = \frac{1}{\beta}$, also

$$E_w T_\alpha E_p = E_w E_q T_\beta,$$

$$T_\alpha E_p = E_q T_\beta.$$

Ist T_β auf s_n anwendbar, so sind $T_\beta|s|$ und $E_q(T_\beta|s|)$ vorhanden, so daß wir von (4. 4. 2) zu

$$(4. 4. 4) \quad T_\alpha(E_p s) = E_q(T_\beta s)$$

übergehen können. Geben wir $p > 0$ und β mit $0 < \beta < 1$ vor, so lassen sich die Beziehungen (4. 4. 1) nach α und q auflösen. Wir erhalten

$$\alpha = \frac{2^p \beta}{2^p \beta + 1 - \beta}, \quad 2^q = \frac{2^p}{2^p \beta + 1 - \beta} \quad \text{mit } \beta < \alpha < 1, \quad 0 < q < p.$$

Die Gleichung (4. 4. 4) bringt dann am unmittelbarsten die schon im Satz 19 erkannte Tatsache zum Ausdruck, daß die Verfahren E_p und T_β miteinander verträglich sind.

Nun sei $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ein Funktionselement vom Konvergenzradius 1, und es sei $E_p \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$ für ein $p > 0$. Wird β mit $0 < \beta < 1$ vorgegeben, so gilt die Gleichung (4. 4. 4), deren linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen s konvergiert. Also konvergiert auch die rechte Seite, d. h. die Entwicklung von $f(\beta + y)$ nach Potenzen von y an der Stelle $y = 1 - \beta$ ist E_q -summierbar zum Wert s . Anstatt β können wir auch q mit $0 < q < p$ vorgeben und β aus p und q errechnen. Damit kommen wir zu der folgenden Formulierung:

Es sei $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ konvergent für $|z| < 1$ und $E_p \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$ für ein $p > 0$. Durchläuft q fallend das offene Intervall $(0; p)$, so durchläuft

$$\beta = \frac{2^p - 2^q}{2^q(2^p - 1)}$$

steigend das offene Intervall $(0; 1)$, und die Entwicklung von $f(\beta + y)$ nach Potenzen von y ist für $y = 1 - \beta$ jeweils E_q -summierbar zum Wert s .

Man kommt in diesem Fall also zur Summierung einer E_p -summierbaren Reihe auch mit jeder niedrigeren Ordnung q aus, wenn man vorher eine geeignete TAYLOR-Transformation einschaltet. Je kleiner man q wählt, desto weiter draußen hat man zu entwickeln. Jedoch genügt die T -Transformation allein nicht, ein gewisser, wenn auch beliebig kleiner Rest an E -Verfahren bleibt — jedenfalls bei dem hier vorliegenden Ergebnis — notwendig.

§ 5.

Der Zusammenhang der Verfahren E_p , B und S_α mit dem T_α -Verfahren unter einer Nebenbedingung.

5.1. Bei unseren bisherigen Vergleichssätzen, also etwa dem $B \rightarrow S_\alpha$ -Satz oder dem $T_\alpha \rightarrow S_\alpha$ -Satz usw., war über die zu limitierende Folge keine andere Voraussetzung zu machen als die in der Natur der Sache liegende, daß die vorkommenden Verfahren anwendbar sind. In diesem und dem letzten Paragraphen werden wir über s_n ziemlich einschränkende Voraussetzungen machen, dafür aber viel schärfere Vergleiche anstellen. Wir werden zum Vergleich auch die gewöhnliche Konvergenz heranziehen und dadurch zu Umkehrsätzen unserer untersuchten Verfahren gelangen.

Zunächst handelt es sich um einen Vergleich der Verfahren E_p , B , S_β einerseits mit dem Verfahren T_α andererseits. HARDY und LITTLEWOOD [2] bewiesen, eine Vermutung von M. RIESZ präzisierend, daß die Verfahren B und $T_{1/2}$ äquivalent sind, wenn man sich auf Folgen s_n mit $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ beschränkt. Daß gerade die Verfahren B und $T_{1/2}$ etwas miteinander zu tun haben werden, zeigen die Gebiete $\mathfrak{G}'(B)$ und $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$. $\mathfrak{G}'(B)$ ist das Gebiet $\Re z < 1$, $\mathfrak{G}'(T_{1/2})$ das Gebiet $\Re z < 1$, $|z| < 2$. Vergleichen wir nun $\mathfrak{G}'(E_p)$ und $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$, so finden wir

$$\mathfrak{G}'(E_p) = \mathfrak{G}'(T_\alpha) \text{ für } \alpha = \frac{2p-1}{2p+1-1}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{3}, \quad 0 < p \leq 1.$$

Derselbe Zusammenhang besteht auch für den Fall $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, $1 < p < \infty$, wenn wir davon absehen, daß dann zu $\mathfrak{G}'(T_\alpha)$ noch die Forderung $|z| < \frac{1}{\alpha}$ hinzutritt. Die Vermutung liegt nahe, daß bei dem angegebenen Zusammenhang zwischen p und α analog zum RIESZschen Satz auch die Verfahren E_p und T_α für alle Folgen $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ äquivalent sind. Ferner ist

$$\mathfrak{G}'(S_\beta) = \mathfrak{G}'(T_\alpha) \text{ für } \alpha = \frac{1}{2-\beta}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

und wiederum ein dementsprechender Äquivalenzsatz zu vermuten. Diese Vermutungen sind richtig. Einschließlich des RIESZschen Satzes gilt

Satz 23. Ist $s_n = o(\sqrt[n]{n})$, also $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für $|z| < 1$ konvergent, so gilt:

(a) Dann und nur dann ist $E_p - \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$ für ein $p > 0$, wenn,

$$\alpha = \frac{2p-1}{2p+1-1}$$

gesetzt, die Entwicklung von $f(\alpha+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-\alpha$ konvergiert gegen s .

(b) Dann und nur dann ist $B \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$, wenn die Entwicklung von $f(\frac{1}{2} + y)$ nach Potenzen von y für $y = \frac{1}{2}$ konvergiert gegen s .

(c) Dann und nur dann ist $S_{\beta} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$ für ein β mit $0 < \beta < 1$, wenn,

$$\gamma = \frac{1}{2 - \beta}$$

gesetzt, die Entwicklung von $f(\gamma + y)$ nach Potenzen von y für $y = 1 - \gamma$ konvergiert gegen s .

Damit ist der RIESZsche Satz nach zwei Richtungen hin verbreitert. Durchläuft p das Intervall $(0; \infty)$, so durchläuft α das Intervall $(0; \frac{1}{2})$; durchläuft β das Intervall $(0; 1)$, so durchläuft γ das Intervall $(\frac{1}{2}; 1)$. Es zeigt sich wieder, daß die S_{β} -Verfahren die Reihe der Verfahren $E_p \dots B$ in natürlicher Weise fortsetzen. Eine Verallgemeinerung des Satzes 23 werden wir in 5.4 kennen lernen. In 6.2 wird sich ergeben, daß die Voraussetzung $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ durch $a_n = o(1)$ ersetzt werden kann.

Beim Beweis des Satzes 23 schließen wir an den HARDY-LITTLEWOODschen Beweis des RIESZschen Satzes an. Teilweise dient auch eine von K. KNOPP [4] gegebene Abschätzung als Vorbild. HARDY und LITTLEWOOD führen in ihrer Untersuchung ein gewisses (E, a) -Verfahren ein¹⁵⁾. Da sich der Buchstabe E inzwischen für das EULER-KNOPPSche Verfahren eingebürgert hat, wählen wir statt (E, a) die Bezeichnung F_a . Es handelt sich dann um folgendes:

Die Folge s_n heißt F_a -limitierbar zum Wert s für ein $a > 0$, wenn

$$F_a s = \left| \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{v=-n}^{\infty} e^{-\frac{a v^2}{n}} s_{n+v} \right| \rightarrow s$$

strebt für $n \rightarrow \infty$, wobei noch die Konvergenz der Reihe für alle $n > 0$ vorausgesetzt wird.

Dieses permanente F_a -Verfahren (vgl. ¹⁹⁾) ist für $a = \frac{1}{2}$ das Bindeglied zwischen den Verfahren B und $T_{1/2}$. Bis auf gewisse Korrekturglieder stimmen sowohl die Koeffizienten der B -Transformation als auch die der $T_{1/2}$ -Transformation mit den Koeffizienten der $F_{1/2}$ -Transformation überein, und die Korrekturglieder spielen bei Folgen $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ keine Rolle. Der hier benutzte Zusammenhang zwischen $T_{1/2}$ und $F_{1/2}$ ist Teil einer allgemeineren Beziehung: Ist $a = (1 - \sigma)/2\alpha$, so sind die Aussagen $T_{\alpha}\text{-lim } s_n = s$ und $F_a\text{-lim } s_n = s$ für Folgen $s_n = o(\sqrt[n]{n})$ äquivalent. Es wird unsere Aufgabe sein, auch die Koeffizienten der

¹⁵⁾ [2], S. 47. Dieses Verfahren wird nicht erst beim Beweis des RIESZschen Satzes herangezogen, sondern spielt schon beim Beweis des $O \rightarrow B \rightarrow K$ -Satzes (vgl. 6.2) eine wesentliche Rolle.

E_p - und S_β -Transformationen mit denen geeigneter F_a -Transformationen zu vergleichen und den Einfluß der dabei auftretenden Korrekturglieder abzuschätzen.

5.2. Die Verwandtschaft der Verfahren E_p , S_β und T_a äußert sich und ist teilweise begründet in der Tatsache, daß ihre zugehörigen Transformationskoeffizienten eine gemeinsame Voraussetzung erfüllen, die wir mit V bezeichnen wollen.

Voraussetzung $V = V(\lambda, a, \sigma)$ für die Matrix A . Die Matrix $A = a_{nv}$ ($n, v \geq 0$) ist permanent. Es gibt positive Konstante λ , a und σ , so daß folgendes richtig ist:

Für die positiven ganzen Zahlen n und m mit $m = \lambda n + \varrho$ und $0 \leq \varrho < \text{Max}(1; \lambda)$ ist bei $-\sigma n < \mu < \sigma n$ (μ ganz) und $m + \mu \geq 0$

$$(5.2.1) \quad a_{n, m+\mu} = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right],$$

wobei die O -Aussage für $n \rightarrow \infty$ gilt, gleichmäßig in ϱ und μ bei den angegebenen Einschränkungen. Ferner ist für jedes positive $\tau < \lambda$ und jedes $t > \lambda$

$$(5.2.2) \quad \sum_{0 \leq v \leq \tau n} a_{nv} s_v = o(1), \quad \sum_{tn \leq v} a_{nv} s_v = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

sofern s_n für ein geeignetes positives h die Voraussetzung $s_n = O(n^h)$ erfüllt.

Der erste Teil des Beweises von Satz 23 wird darin bestehen zu zeigen, daß die Matrizen E_p , S_β und T_a die Voraussetzung V erfüllen. Wir behandeln zuerst E_p und setzen für $p > 0$

$$r = q + 1 = 2^p > 1.$$

Wie wir wissen, ist

$$E_p = a_{nv} = \frac{1}{r^n} \binom{n}{v} q^{n-v} \quad (n, v \geq 0)$$

permanent. Wir setzen weiter

$$\lambda = \frac{1}{r}, \quad a = \frac{r}{2(r-1)} = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}$$

und wählen ein beliebiges, von jetzt an festgehaltenes positives

$$\sigma < \text{Min} \left(\frac{1}{2r}; \frac{r-1}{2r} \right).$$

Es ist dann $\lambda < 1$ und $\text{Max}(1; \lambda) = 1$. Wir zeigen, daß mit diesen Konstanten (5.2.1) gilt. Dabei setzen wir n größer als eine geeignete Anfangsnummer voraus, und zwar wählen wir n so groß, daß für ganzes μ mit $-\sigma n < \mu < \sigma n$ die Hilfsungleichungen

$$0 < m < n, \quad \frac{1}{2r} < \frac{m+\mu}{n} < \frac{r+1}{2r} < 1, \quad \frac{|\mu|}{m} < \frac{1}{2}, \quad \frac{|\mu|}{n-m} < \frac{3}{4}$$

gelten, sofern $0 \leq \varrho < 1$ und $m = \lambda n + \varrho$ ganz ist. Sind n , μ und ϱ

in dieser Weise eingeschränkt, so erhalten wir aus der STIRLINGSchen Formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

nach kurzer Zwischenrechnung die Abschätzung

$$(5.2.3) \quad a_{n,m+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} P Q \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

mit den Abkürzungen

$$P = \left(1 + \frac{\mu}{m}\right)^{-m-\mu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\mu}{n-m}\right)^{-n+m+\mu-\frac{1}{2}},$$

$$Q = \left(\frac{n}{mr}\right)^n \left(\frac{n-m}{qm}\right)^{-n+m+\mu},$$

in der das O gleichmäßig in μ und q gilt für $n \rightarrow \infty$ oder, was dasselbe ist, für $m \rightarrow \infty$. Nun ist für $0 \leq x \leq 1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\vartheta_1}{3} x^3 \quad \text{mit } 0 < \vartheta_1 < 1,$$

und für $-1 < x \leq 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\vartheta_2}{1+x} x^3 \quad \text{mit } 0 < \vartheta_2 < 1,$$

also nach unseren Hilfsungleichungen

$$\log\left(1 + \frac{\mu}{m}\right) = \frac{\mu}{m} - \frac{\mu^2}{2m^2} + \frac{\mu^3}{m^3} O(1),$$

$$\log\left(1 - \frac{\mu}{n-m}\right) = -\frac{\mu}{n-m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)^2} - \frac{\mu^3}{(n-m)^3} O(1).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \log P = & -\frac{\mu^2}{2m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)} + \frac{\mu}{m} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\mu}{m} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{m^2} O(1) \right] \\ & + \frac{\mu}{n-m} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\mu}{n-m} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{(n-m)^2} O(1) \right] \\ & + \frac{\mu^3}{m^2} \left[\frac{1}{2} - O(1) - \frac{\mu}{m} O(1) \right] + \frac{\mu^3}{(n-m)^2} \left[-\frac{1}{2} + O(1) - \frac{\mu}{n-m} O(1) \right]. \end{aligned}$$

Die vier eckigen Klammern sind alle $O(1)$, und wegen

$$\frac{1}{n-m} = \frac{1}{r-1} \frac{1}{m} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

ist ferner

$$-\frac{\mu^3}{2m} - \frac{\mu^2}{2(n-m)} = -\frac{\mu^2}{2m} \frac{r}{r-1} + \frac{\mu^2}{m^2} O(1),$$

so daß wir

$$P = e^{-\frac{\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)}$$

erhalten. Weiter ist

$$\begin{aligned}\log Q &= -n \log \left(1 + \frac{er}{n}\right) + (n - m - \mu) \left[\log \left(1 + \frac{er}{n}\right) - \log \left(1 - \frac{er}{(r-1)n}\right) \right] \\ &= -n \left[\frac{er}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + ((1 - \lambda)n - \varrho - \mu) \left[\frac{er}{n} - \frac{er}{(r-1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{\mu}{n} O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad Q = e^{\frac{\mu}{m} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right].\end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \sqrt{\frac{2a}{m}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]$$

erhalten wir aus (5.2.3) damit (5.2.1).

Es sei nun weiter $0 < \tau < t \leq 1^{16)}$ und $s_n = O(n^h)$ für ein $h > 0$. Wir wählen ein positives $\sigma' < \sigma$, so daß, $a_{n\nu} = a(n, \nu)$ gesetzt, für ein geeignetes $a' > 0$

$$a(n, m \pm [\sigma' n]) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-a' \frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty^{17)},$$

und für genügend großes n

$$\tau n < m - [\sigma' n] < \frac{n}{r} < m + [\sigma' n] < tn$$

ist. Wegen

$$\frac{a(n, \nu)}{a(n, \nu-1)} = \frac{n-\nu+1}{q\nu} \quad \text{für } 0 < \nu \leq n$$

ist die Folge $a_{n\nu}$ bei festem n steigend für $0 \leq \nu \leq \frac{n}{r}$ und fallend für $\frac{n}{r} \leq \nu \leq n$. Wenn wir daher in den folgenden Summen die Anzahl der Summanden durch $O(n)$, die $a_{n\nu}$ durch $a(n, m - [\sigma' n])$ bzw. $a(n, m + [\sigma' n])$ und die s_ν durch $O(n^h)$ abschätzen, so erhalten wir

$$\sum_{0 \leq \nu \leq \tau n} a_{n\nu} s_\nu = O\left(n^{h+\frac{1}{2}} e^{-a' \frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1), \quad \sum_{tn \leq \nu \leq n} a_{n\nu} s_\nu = o(1).$$

Damit ist gezeigt, daß E_p die Voraussetzung V erfüllt.

Wir behandeln nun die Matrix

$$S_\beta = a_{n\nu} = a(n, \nu) = (1 - \beta)^{n+1} \binom{n+\nu}{\nu} \beta^\nu \quad (0 < \beta < 1)$$

und zeigen, uns kürzer fassend, daß auch sie die Voraussetzung V erfüllt, und zwar mit

$$\lambda = \frac{\beta}{1-\beta}, \quad a = \frac{1-\beta}{2}$$

¹⁶⁾ Für $t > 1$ ist die zweite Gleichung (5.2.2) wegen $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ sicher richtig.

¹⁷⁾ Daß σ' und a' so gewählt werden können, folgt aus (5.2.1). Für genügend kleines σ' ist sicher das Glied

$$\frac{[\sigma' n]^2}{m^2} O(1) < \frac{a}{2} \frac{[\sigma' n]^2}{m}.$$

und einem beliebigen, jetzt festgehaltenen positiven $\sigma \leq \frac{\lambda}{2}$. Ist $m = \lambda n + \varrho$ ganz mit $0 \leq \varrho < \text{Max}(1; \lambda)$, so ist für $n > 0$ und $-\sigma n < \mu < \sigma n$

$$0 < m, \quad \frac{\lambda n}{2} < m + \mu, \quad \frac{|\mu|}{n+m} < \frac{|\mu|}{m} < \frac{1}{2},$$

und für $n \rightarrow \infty$, d. h. auch für $m \rightarrow \infty$

$$a_{n, m+\mu} = \frac{1-\beta}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m+n}{mn}} P Q \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]$$

mit

$$P = \left(1 + \frac{\mu}{m}\right)^{-m-\mu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\mu}{n+m}\right)^{n+m+\mu+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\alpha\mu^2}{m} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)},$$

$$Q = \left(\frac{(1-\beta)m}{\beta n}\right)^n \left(\beta \left(1 + \frac{n}{m}\right)\right)^{n+m+\mu} = e^{\frac{\mu}{m} O(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right].$$

Zusammen mit

$$\sqrt{\frac{m+n}{mn}} = \frac{1}{\sqrt{m(1-\beta)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

ergibt sich (5.2.2).

Es sei nun weiter $0 < \tau < \lambda < t$ und $s_n = O(n^h)$ für ein $h > 0$. Wir wählen ein positives σ' , so daß für ein geeignetes $a' > 0$

$$a(n, m \pm [\sigma' n]) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-a' \frac{[\sigma' n]^2}{m}}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und für genügend großes n

$$\tau n < m - [\sigma' n] < \lambda n < m + [\sigma' n] < t n$$

ist. Wegen

$$\frac{a(n, v)}{a(n, v-1)} = \frac{\beta(n+v)}{v} \quad \text{für } v > 0$$

ist die Folge a_{nv} bei festem n steigend für $0 \leq v \leq \lambda n$ und fallend für $\lambda n \leq v$. Daher ist

$$\sum_{0 \leq v \leq \tau n} a_{nv} |s_v| = O\left(n^{h+\frac{1}{2}} e^{-\frac{a'[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1).$$

Setzen wir $v^h a_{nv} = b_{nv} = b(n, v)$, so ist

$$\sum_{tn \leq v} a_{nv} |s_v| = O\left(\sum_{tn \leq v} b_{nv}\right).$$

Wegen

$$\frac{b(n, v)}{b(n, v-1)} = \frac{\beta v^h (n+v)}{(v-1)^h v} \leq \frac{v^h}{(v-1)^h} \beta \left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad \text{für } tn \leq v$$

und $\beta(1+t^{-1}) < 1$ ist bei genügend großem n für ein geeignetes $\gamma < 1$

$$\frac{b(n, v)}{b(n, v-1)} < \gamma \quad \text{für } tn \leq v,$$

und daher $\sum_{t_n \leq v} b_{n,v}$ von derselben Größenordnung wie der erste Summand, d. h.

$$\sum_{t_n \leq v} a_{n,v} |s_v| = O\left(n^{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{a'[\sigma' n]^2}{m}}\right) = o(1).$$

Damit ist gezeigt, daß S_β die Voraussetzung V erfüllt.

Ganz ähnlich wie E_p und S_β behandelt man schließlich die Matrix T_α . Wir geben nur das Ergebnis an, nämlich daß T_α ($0 < \alpha < 1$) die Voraussetzung V erfüllt mit

$$\lambda = \frac{1}{1-\alpha}, \quad a = \frac{1-\alpha}{2\alpha}, \quad 0 < \sigma \leq \frac{\lambda-1}{2}^{18}.$$

5.3. Der zweite Teil des Beweises von Satz 23 besteht in dem folgenden Nachweis:

(*) Die Matrix A erfülle die Voraussetzung $V(\lambda, a, \sigma)$, und es sei $s_n = O(n^{h+\frac{1}{2}})$ für ein $h \geq 0$. Aus $t_n = As = O(n^h)$ folgt $t'_n = F_a s = O(n^h)$, und umgekehrt. Die Aussage bleibt richtig, wenn überall O durch o ersetzt wird.

Wir beweisen nur den O -Fall. Der o -Fall wäre ganz ebenso zu behandeln. Um von $t'_n = O(n^h)$ auf $t_n = O(n^h)$ zu schließen, setzen wir $m = \lambda n + \varrho$ für $n > 0$, wo $0 \leq \varrho = \varrho(n) < 1$ und $\lambda n + \varrho$ ganz ist, und prüfen, ob $t_n - t'_m = O(n^h)$ ist für $n \rightarrow \infty$ oder, was dasselbe ist, für $m \rightarrow \infty$. Um von $t_n = O(n^h)$ auf $t'_n = O(n^h)$ zu schließen, bestimmen wir zu jedem $m > 0$ ein nicht negatives $\varrho = \varrho(m) < \lambda$, so daß $m - \varrho$ ein ganzzahliges Vielfaches von λ ist, setzen $n = (m - \varrho)/\lambda$ und prüfen, ob $t'_m - t_n = O(n^h)$ ist für $n \rightarrow \infty$. Unsere Aufgabe besteht also darin, zu zeigen:

Ist $0 \leq \varrho < \text{Max}(1; \lambda)$ und sind n und $m = \lambda n + \varrho$ positiv ganz, so ist gleichmäßig in ϱ

$$(5.3.1) \quad t_n - t'_m = O(n^h).$$

Wir setzen bei positivem $\eta < 1$

$$\bar{t}_n = \sum_{(1-\eta)m < v < (1+\eta)m} a_{n,v} s_v = \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n,m+\mu} s_{m+\mu},$$

$$\bar{t}'_m = \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{|\mu| < \eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}}.$$

Wegen (5.2.2) ist

$$t_n = \bar{t}_n + \sum_{0 \leq v \leq (1-\eta)m} a_{n,v} s_v + \sum_{(1+\eta)m \leq v} a_{n,v} s_v = \bar{t}_n + o(1).$$

¹⁸⁾ Der Wert $\frac{\lambda-1}{2}$ stellt nur eine mögliche Schranke dar und liegt nicht in der Natur des T_α -Verfahrens begründet.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 t'_m &= \bar{t}'_m + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{-m \leq \mu \leq -\eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} + \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \sum_{\eta m \leq \mu} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}}, \\
 &\quad \sum_{-m \leq \mu \leq -\eta m} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} = \sum_{0 \leq \nu \leq (1-\eta)m} s_\nu e^{-\frac{a(m-\nu)^2}{m}} \\
 &\quad = O\left(m^{\frac{h+3}{2}} e^{-a\eta^2 m}\right) = o(1), \\
 \sum_{\eta m \leq \mu} s_{m+\mu} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} &= O\left(\sum_{\eta m \leq \mu} \mu^{\frac{h+1}{2}} e^{-a\eta\mu}\right) = O\left(\sum_{\eta m \leq \mu} e^{-\frac{a\eta\mu}{2}}\right) = o(1), \\
 t'_m &= \bar{t}'_m + o(1).
 \end{aligned}$$

Mit (5.3.1) ist also gleichwertig $\bar{t}_n - \bar{t}'_m = O(n^h)$.

Wir denken uns nun η so klein gewählt, daß aus $|\mu| < \eta m$ auch $|\mu| < \sigma n$ folgt für alle in Frage kommenden Paare n, m . Dann können wir in die Summe für t_n mit (5.2.1) eingehen. Wir nehmen η auch noch so klein, daß für das dort im Exponenten auftretende Glied $\frac{\mu^3}{m^2} O(1)$ gilt

$$\left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| < \frac{a\mu^3}{2m} \text{ für } |\mu| < \eta m.$$

Berücksichtigen wir noch die für beliebiges $\lambda > 0$, $b > 0$, $l \geq 0$ gültige Formel¹⁹⁾

$$(5.3.2) \quad \sum_{|\mu| \leq \lambda m} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sqrt{\frac{m}{b}}^{\frac{l+1}{2}} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \quad (m \rightarrow \infty)$$

¹⁹⁾ Die Formel ergibt sich durch Übergang von den Summen zu Integralen (vgl. K. KNOPP [4], S. 143, Fußnote). Z. B. ist, weil das bei $|x| = \sqrt{\frac{lm}{2b}}$ gelegene

Maximum von $|x|^l e^{-\frac{bx^2}{m}}$ den Wert $\left(\sqrt{\frac{lm}{2be}}\right)$ hat,

$$\left| \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l e^{-\frac{bx^2}{m}} dx \right| < C \left(\sqrt{\frac{lm}{2be}} \right)$$

mit einer von m und l unabhängigen Konstanten C , also

$$\left| \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} |\mu|^l e^{-\frac{b\mu^2}{m}} - \sqrt{\frac{m}{b}}^{\frac{l+1}{2}} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \right| < C \left(\sqrt{\frac{lm}{2be}} \right).$$

Es ist auch

$$\sum_{\mu=-m}^{\infty} e^{-\frac{b\mu^2}{m}} \simeq \sqrt{\frac{m}{b}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi m}{b}},$$

woraus die Permanenz der F_b -Verfahren folgt.

und die für beliebiges x gültige Abschätzung $|e^x - 1| \leq |x| e^{|x|}$, so erhalten wir

$$\bar{t}_n - \bar{t}'_m = \sum_{|\mu| \leq \eta m} s_{m+\mu} \left(a_{n, m+\mu} - \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} \right) = \Sigma' + \Sigma'',$$

$$\Sigma' = O\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{|\mu| \leq \eta m} s_{m+\mu} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} + \frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1),$$

$$\Sigma'' = \sum_{|\mu| \leq \eta m} s_{m+\mu} \sqrt{\frac{a}{\pi m}} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} \left(e^{\frac{\mu}{m} O(1) + \frac{\mu^3}{m^2} O(1)} - 1 \right);$$

$$\begin{aligned} \Sigma' &= O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leq \eta m} e^{-\frac{a\mu^2}{m}} + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| \right) \\ &= O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leq \eta m} e^{-\frac{a\mu^2}{2m}}\right) = O\left(m^{h-\frac{1}{2}}\right) = O(m^h); \end{aligned}$$

$$|\Sigma''| \leq \sum_{|\mu| \leq \eta m} |s_{m+\mu}| \sqrt{\frac{a}{\pi m}} \left(\left| \frac{\mu}{m} O(1) \right| + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| \right) e^{-\frac{a\mu^2}{m} + \left| \frac{\mu}{m} O(1) \right| + \left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right|},$$

$$\Sigma'' = O\left(m^{h-1} \sum_{|\mu| \leq \eta m} |\mu| e^{-\frac{a\mu^2}{2m}}\right) + O\left(m^{h-2} \sum_{|\mu| \leq \eta m} |\mu|^3 e^{-\frac{a\mu^2}{2m}}\right) = O(m^h).$$

Also ist $t_n - t'_m = O(n^h)$ und damit (*) bewiesen.

5.4. Wenden wir (*) im o -Fall und für $h = 0$ an, so ergibt sich die Äquivalenz von A und F_a , sofern $s_n = o(\sqrt{n})$ ist. Zusammen mit den Ergebnissen aus 5.2 folgt: Für Folgen $s_n = o(\sqrt{n})$ ist

$$E_p \text{ äquivalent mit } F_a \text{ für } a = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1} \left(0 < p, \frac{1}{2} < a < \infty \right),$$

$$S_\beta \quad \quad \quad \quad \quad F_a \quad \quad a = \frac{1-\beta}{2} \left(0 < \beta < 1, 0 < a < \frac{1}{2} \right),$$

$$T_\alpha \quad \quad \quad \quad \quad F_a \quad \quad a = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \left(0 < \alpha < 1, 0 < a < \infty \right)^{20)}.$$

Also ist für solche Folgen

$$T_\alpha \text{ äquivalent mit } E_p \text{ für } \alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \left(0 < p, 0 < \alpha < \frac{1}{2} \right),$$

$$T_\alpha \quad \quad \quad \quad \quad S_\beta \quad \quad \alpha = \frac{1}{2-\beta} \left(0 < \beta < 1, \frac{1}{2} < \alpha < 1 \right).$$

Nehmen wir die Äquivalenz der Verfahren B und $F_{1/2}$ hinzu²¹⁾, so ist damit Satz 23 bewiesen.

Wir können den Satz 23 nun noch durch Heranziehung des Multiplikationssatzes der T -Transformation verallgemeinern. Wir verstehen dabei unter $T_0 = E_0$ die Einheitsmatrix, unter dem T_0 - bzw. E_0 -Verfahren das Verfahren der gewöhnlichen Konvergenz.

²⁰⁾ Vgl. HARDY und LITTLEWOOD [2], S. 51, Theorem 4.3.

²¹⁾ Vgl. HARDY und LITTLEWOOD [2], S. 48, Theorem 3.4.

Es sei $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma \leq \alpha$, $\delta = (\alpha - \gamma)/(1 - \gamma)$ und $s_n = o(\sqrt[n]{n})$. Dann ist $0 \leq \delta < \alpha$ und $T_\alpha = T_\delta T_\gamma$, also

$$(5.4.1) \quad T_\alpha s \rightarrow s \text{ äquivalent mit } T_\delta(T_\gamma s) \rightarrow s.$$

Da auch $T_\gamma s = o(\sqrt[n]{n})$ ist²²⁾, können wir im Falle $0 < \alpha < \frac{1}{2}$,

$$2^p = \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha}, \text{ d. h. } \alpha = \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1} \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, p > 0 \right)$$

und

$$2^q = \frac{1 - \delta}{1 - 2\delta}, \text{ d. h. } \delta = \frac{2^q - 1}{2^{q+1} - 1} \left(0 \leq \delta < \frac{1}{2}, q \geq 0 \right)$$

gesetzt, von (5.4.1) zu der Aussage

$$E_p s \rightarrow s \text{ äquivalent mit } E_q(T_\gamma s) \rightarrow s$$

übergehen, die also gilt, wenn

$$(5.4.2) \quad p > 0, 0 < \gamma \leq \frac{2^p - 1}{2^{p+1} - 1}, 2^q = \frac{2^p}{1 + \gamma(2^{p+1} - 1)} \quad (0 \leq q < p)$$

ist. Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ können wir von (5.4.1) zu der Aussage

$$B s \rightarrow s \text{ äquivalent mit } E_q(T_\gamma s) \rightarrow s$$

übergehen, die also gilt, wenn

$$(5.4.3) \quad 0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, 2^q = \frac{1}{2\gamma} \quad (0 \leq q)$$

ist. Schließlich sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Wir setzen in diesem Falle

$$\beta = \frac{2\alpha - 1}{\alpha}, \text{ d. h. } \alpha = \frac{1}{2 - \beta} \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1, 0 < \beta < 1 \right)$$

und

$$\varepsilon = \frac{2\delta - 1}{\delta}, \text{ d. h. } \delta = \frac{1}{2 - \varepsilon} \left(\frac{1}{2} < \delta < 1, 0 < \varepsilon < 1 \right),$$

während für $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ der bisherige Zusammenhang zwischen δ und q gelten soll. Dann können wir von (5.4.1) zu der Aussage

$$S_\beta s \rightarrow s \text{ äquivalent mit } \begin{cases} \text{(I) } E_q(T_\gamma s) \rightarrow s & \text{für } 0 \leq \delta < \frac{1}{2}, \\ \text{bzw. (II) } B(T_\gamma s) \rightarrow s & \text{„ } \delta = \frac{1}{2}, \\ \text{„ (III) } S_\varepsilon(T_\gamma s) \rightarrow s & \text{„ } \frac{1}{2} < \delta < 1 \end{cases}$$

übergehen, die also gilt, wenn

²²⁾ Setzen wir $t = \frac{2}{1 - \alpha}$, so ist wegen (5.2.2)

$$T_\alpha s = \frac{(1 - \alpha)^{n+1}}{\alpha^n} \sum_{n \leq v < tn} \binom{n}{v} \alpha^v s_v + o(1) = o(\sqrt[n]{n}) + o(1) = o(\sqrt[n]{n}).$$

$$(5.4.4) \quad 0 < \beta < 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I) } \frac{\beta}{2-\beta} < \gamma \leq \frac{1}{2-\beta}, \quad 2^q = \frac{1-\beta}{\gamma(2-\beta)-\beta} \\ \text{bzw. (II) } \gamma = \frac{\beta}{2-\beta}, \\ \text{„ (III) } 0 < \gamma < \frac{\beta}{2-\beta}, \quad \varepsilon = \frac{\beta-\gamma(2-\beta)}{1-\gamma(2-\beta)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0 \leq q), \\ \\ (0 < \varepsilon < \beta) \end{array}$$

ist. Wir fassen zusammen in dem folgenden

Satz 24. Ist $s_n = o(\sqrt{n})$, also $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ für $|z| < 1$ konvergent, so gilt:

(a) Werden p, γ und q gemäß (5.4.2) gewählt, so ist dann und nur dann $E_p - \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$, wenn die Entwicklung von $f(\gamma+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-\gamma$ durch das E_q -Verfahren zum Wert s summierbar ist.

(b) Werden γ und q gemäß (5.4.3) gewählt, so ist dann und nur dann $B - \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$, wenn die Entwicklung von $f(\gamma+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-\gamma$ durch das E_q -Verfahren zum Wert s summierbar ist.

(c) Werden β, γ, q und ε gemäß (5.4.4) gewählt, so ist dann und nur dann $S_\beta - \sum_{v=0}^{\infty} a_v = s$, wenn die Entwicklung von $f(\gamma+y)$ nach Potenzen von y für $y = 1-\gamma$ im Falle (I) durch das E_q -, im Falle (II) durch das B -, im Falle (III) durch das S_ε -Verfahren zum Wert s summierbar ist.

In jedem der Fälle (a), (b), (c) kommen wir für $q = 0$ zu Satz 23 zurück.

§ 6.

Die Äquivalenz der Verfahren E_p, B, S_α und T_α für beschränkte Folgen. Umkehrsätze.

6.1. Wir schränken nun die Größenordnung von s_n noch weiter ein und verlangen anstatt $s_n = o(\sqrt{n})$ sogar $s_n = O(1)$. Dann sind unsere untersuchten Verfahren überhaupt alle äquivalent:

Satz 25. Die Verfahren $E_p (p > 0)$, B , $S_\beta (0 < \beta < 1)$, $T_\alpha (0 < \alpha < 1)$ und $F_a (a > 0)$ sind für beschränkte Folgen äquivalent.

Da die Verfahren E_p, B und S_β nach § 5 je mit einem geeigneten T_α und die Verfahren T_α je mit einem geeigneten F_a äquivalent sind,

immer unter der Voraussetzung $s_n = O(1)$, genügt es zu zeigen, daß die Verfahren F_a unter sich äquivalent sind²³⁾.

Es sei s_n beschränkt und $0 < a < b$. Aus $F_b s \rightarrow s$ folgt $F_a s \rightarrow s$. Nach 5.4 ist dies, wenn

$$\alpha = \frac{1}{2a+1}, \quad \beta = \frac{1}{2b+1}$$

gesetzt wird, gleichwertig mit der Aussage, daß aus $T_\beta s \rightarrow s$ auch $T_\alpha s \rightarrow s$ folgt. Die letzte Aussage ist aber richtig nach Satz 6. Es bleibt umgekehrt noch zu zeigen, daß aus $F_a s \rightarrow s$ auch $F_b s \rightarrow s$ folgt. Diese Tatsache bildet das Kernstück des HARDY-LITTLEWOODSchen Beweises des $O-B \rightarrow K$ -Satzes und des KNOPPSchen Beweises des $O-E_p \rightarrow K$ -Satzes²⁴⁾. Sie beruht ihrerseits wieder auf dem folgenden

Hilfssatz. Ist s_n beschränkt und strebt $F_a s \rightarrow 0$ für ein $a > 0$, so strebt für $\lambda = 1, 2, \dots$ auch

$$(6.1.1.) \quad H_n^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=-n}^{\infty} \left(\frac{v^2}{n}\right)^\lambda e^{-\frac{av^2}{n}} s_{n+r} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Im Anschluß an HARDY und LITTLEWOOD und K. KNOPP benutzen wir nun zuerst den Hilfssatz, um von $F_a s \rightarrow s$ auf $F_b s \rightarrow s$ zu schließen. Für den Hilfssatz selbst geben wir nachher einen neuen Beweis an.

Nach dem bisher Bewiesenen genügt es, von $F_a s \rightarrow s$ auf $F_b s \rightarrow s$ mit $b = 2a$ zu schließen. Außerdem darf $s = 0$ gesetzt werden. Aus $H_n^{(0)} = o(1)$ ist also auf

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=-n}^{\infty} e^{-\frac{2av^2}{n}} s_{n+r} = o(1)$$

zu schließen. Wegen

$$e^{-\frac{av^2}{n}} = \sum_{\lambda=0}^l \frac{(-a)^\lambda}{\lambda!} \left(\frac{v^2}{n}\right)^\lambda + \frac{(-a)^{l+1}}{(l+1)!} \left(\frac{v^2}{n}\right)^{l+1} e^{-\frac{\vartheta av^2}{n}}$$

mit $0 < \vartheta < 1$ bekommen wir für $l, n = 1, 2, \dots$

$$G_n = \sum_{\lambda=0}^l \frac{(-a)^\lambda}{\lambda!} H_n^{(\lambda)} + R_n^{(l)}, \quad R_n^{(l)} = \frac{(-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=-n}^{\infty} \left(\frac{v^2}{n}\right)^{l+1} e^{-\frac{a(1+\vartheta)v^2}{n}} s_{n+r}.$$

²³⁾ Ist die Äquivalenz der Verfahren E_p , S_β , T_α und F_a bewiesen, so folgt die Möglichkeit, auch noch das B -Verfahren hinzuzufügen, unter Vermeidung des (in § 5 nicht selbständig bewiesenen) RIESZSchen Satzes aus dem $E_p \rightarrow B$ - und dem $B \rightarrow S_\beta$ -Satz.

²⁴⁾ Wegen des $O-B \rightarrow K$ - und des $O-E_p \rightarrow K$ -Satzes vgl. 6.2. HARDY und LITTLEWOOD ([2], S. 41–44) benutzen eine Integralform des F_a -Verfahrens. Bei K. KNOPP ([4], S. 144–147) ist die Beweisaneinanderordnung so getroffen, daß nur von $F_1 s \rightarrow s$ auf $F_2 s \rightarrow s$ geschlossen zu werden braucht. Diese Punkte sind nicht wesentlich.

Bedeutend $K, K_1, \dots$ geeignete, von n und l unabhängige positive Konstante, so ist (vgl. ¹⁹⁾)

$$\begin{aligned} |R_n^{(l)}| &< \frac{K a^{l+1}}{(l+1)! n^{\frac{3}{2}}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v^{2l+2} e^{-\frac{av^2}{n}} \\ &< \frac{K \Gamma(l+\frac{3}{2})}{\sqrt{a} \Gamma(l+2)} + \frac{K_1 (l+1)^{l+1}}{\sqrt{n} (l+1)! e^{l+1}} < \frac{K_2}{\sqrt{l}} + \frac{K_3}{\sqrt{n} \sqrt{l}} < \frac{K_4}{\sqrt{l}}. \end{aligned}$$

Daher konvergiert die Reihe

$$G_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-a)^{\lambda}}{\lambda!} H_n^{(\lambda)}$$

gleichmäßig in n , zusammen mit (6.1.1) folgt also $G_n = o(1)$.

Es ist nun noch der Hilfssatz zu beweisen. Für ein festes $\lambda \geq 0$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{v=n+1}^{\infty} \binom{v^2}{n}^{\lambda} e^{-\frac{av^2}{n}} s_{n+v} = O\left(\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}} \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{2\lambda} e^{-av}\right) = o(1).$$

Setzen wir daher

$$f_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{v=-n}^n \binom{v^2}{n}^{\lambda} e^{-\frac{xv^2}{n}} s_{n+v} \quad (n > 0, \text{ ganz; } \lambda \geq 0, \text{ ganz; } x > 0),$$

so ist von $s_n = O(1)$ und $f_n^{(0)}(a) = o(1)$ auf $f_n^{(\lambda)}(a) = o(1)$ für $\lambda = 1, 2, \dots$ zu schließen. Nun dürfen wir aber in $Fas = o(1)$ zu jedem kleineren positiven a übergehen. Also haben wir von $s_n = O(1)$ und

$$(6.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(0)}(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x \leq a$$

auf $f_n^{(\lambda)}(a) = o(1)$ für $\lambda = 1, 2, \dots$ zu schließen. Wir ziehen dazu einen Satz von M. MÜLLER²⁵⁾ über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation heran.

Für ein festes λ ist die Funktionenfolge $f_n^{(\lambda)}(x)$ an jeder Stelle $x_0 > 0$ gleichgradig differenzierbar. Ist nämlich $|s_n| < M$, so ist wegen

$$e^{-\frac{h v^2}{n}} = 1 - \frac{h v^2}{n} + \frac{h^2 v^4}{2 n^2} e^{-\frac{\theta h v^2}{n}}$$

²⁵⁾ M. MÜLLER [8], S. 94, Satz 1. Der Satz besagt, daß von

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{auf} \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x_0) = f'(x_0)$$

geschlossen werden darf, wenn (A) für $c \leq x \leq d$ gilt mit $c < d$, wenn $c \leq x_0 \leq d$ ist, und wenn für $n = 1, 2, \dots$ die Funktionen $f_n(x)$ an der Stelle x_0 gleichgradig differenzierbar sind, d.h. wenn $f_n'(x_0)$ vorhanden ist und es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von n unabhängiges $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\left| \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \text{für } 0 < |h| < \delta$$

ist. Ist $x_0 = c$ oder $x_0 = d$, so ist unter Differenzierbarkeit einseitige Differenzierbarkeit zu verstehen. Die Existenz von $f'(x_0)$ ist in der Behauptung (B) inbegriffen.

mit $0 < \vartheta < 1$ und wegen (5.3.2) für $0 < |h| < \frac{x_0}{2}$

$$\left| \frac{f_n^{(\lambda)}(x_0 + h) - f_n^{(\lambda)}(x_0)}{h} - \frac{d}{dx} f_n^{(\lambda)}(x_0) \right| < \frac{M}{\sqrt[n]{n}} \sum_{v=-n}^n \left(\frac{v^2}{n} \right)^\lambda e^{-\frac{x_0 v^2}{n}} \left| \frac{e^{-\frac{h v^2}{n}} - 1}{h} + \frac{v^2}{n} \right|$$

$$< \frac{M|h|}{\sqrt[n]{n}} \sum_{v=-n}^n \left(\frac{v^2}{n} \right)^{\lambda+2} e^{-\frac{x_0 v^2}{2n}} < M_1 |h|$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten M_1 , woraus die behauptete gleichgradige Differenzierbarkeit folgt. Wegen

$$\frac{d}{dx} f_n^{(\lambda)}(x) = -f_n^{(\lambda+1)}(x)$$

erhalten wir nun aus (6.1.2) durch wiederholte Anwendung des Satzes von M. MÜLLER

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(\lambda)}(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x \leq a$$

und $\lambda = 1, 2, \dots$. Damit ist der Hilfssatz, also auch Satz 25 bewiesen.

6.2. Wir wenden uns nun den Umkehrrsätzen der Verfahren E_p , B , S_α und T_α zu. Nach HARDY und LITTLEWOOD [2] folgt aus $B\text{-}\lim s_n = s$ rückwärts $s_n \rightarrow s$, wenn $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ ist; man bezeichnet diesen Satz als $O\text{-}B \rightarrow K$ -Satz. Ihm entsprechend gilt mit derselben Umkehrbedingung der $O\text{-}E_p \rightarrow K$ -Satz, wie K. KNOPP [4] direkt bewiesen hat, oder wie auch aus dem $E_p \rightarrow B$ -Satz folgt. Schließlich kennt man den $O\text{-}T_\alpha \rightarrow K$ -Satz, wiederum mit der Umkehrbedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{26}$. Diese Sätze sind wegen des $B \rightarrow S_\alpha$ -, des $E_p \rightarrow S_\alpha$ - und des $T_\alpha \rightarrow S_\alpha$ -Satzes enthalten ²⁷⁾ in dem folgenden $O\text{-}S_\alpha \rightarrow K$ -Satz:

Satz 26. Aus $S_\alpha \text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ und $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Seinem Beweis schicken wir voraus den Beweis des Satzes 27.

Satz 27. Es sei $h \geq 0$. Aus $S_\alpha s = O(n^h)$ und $a_n = O(n^{h-\frac{1}{2}})$ folgt $s_n = O(n^h)$. Die Aussage bleibt richtig, wenn überall O durch o ersetzt wird.

Wir beweisen nur den O -Fall. Der o -Fall wäre ganz ebenso zu behandeln. Wir benutzen, daß die Matrix $S_\alpha = a_{n\nu}$ die Voraussetzung $V(\lambda, a, \sigma)$ aus 5.2 erfüllt. Zu jedem ganzen $m > 0$ bestimmen wir ein nicht negatives $\varrho = \varrho(m) < \lambda$, so daß $m - \varrho$ ein ganzzahliges Vielfaches

²⁶⁾ Vgl. HARDY und LITTLEWOOD [2], S. 52 und R. WAIS [9], S. 47.

²⁷⁾ Die Bedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ hat die Anwendbarkeit von S_α auf s_n zur Folge.

von λ ist, setzen $n = (m - \varrho)/\lambda$, $t_n = S_\alpha s$ und bei positivem $\eta < 1$

$$\bar{t}_n = \sum_{(1-\eta)m < r < (1+\eta)m} a_{n,r} s_r = \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n,m+\mu} s_{m+\mu}.$$

Wegen $a_n = O(n^{h-\frac{1}{2}})$ können wir (5.2.2) anwenden und erhalten

$$t_n = \bar{t}_n + o(1), \quad \bar{t}_n = O(m^h),$$

wobei sich die O - und o -Aussagen auf $n \rightarrow \infty$ oder, was dasselbe ist, auf $m \rightarrow \infty$ beziehen. Ebenfalls wegen (5.2.2) ist

$$\sum_{|\mu| < \eta m} a_{n,m+\mu} = 1 + o(1),$$

so daß wir

$$\begin{aligned} s_m &= (1 + o(1)) \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n,m+\mu} s_m \\ &= (1 + o(1)) \sum_{|\mu| < \eta m} a_{n,m+\mu} (s_m - s_{m+\mu}) + O(m^h) \end{aligned}$$

setzen können. Wir denken uns nun η so klein gewählt, daß aus $|\mu| < \eta m$ auch $|\mu| < \sigma n$ folgt für alle in Frage kommenden Paare n, m . Dann können wir (5.2.1) heranziehen. Wir nehmen η auch noch so klein, daß für das dort im Exponenten auftretende Glied $\frac{\mu^3}{m^2} O(1)$ gilt:

$$\left| \frac{\mu^3}{m^2} O(1) \right| < \frac{\alpha \mu^2}{2m} \quad \text{für } |\mu| < \eta m.$$

Wegen $a_n = O(n^{h-\frac{1}{2}})$ ist

$$|s_m - s_{m+\mu}| = |\mu| O(m^{h-\frac{1}{2}}) \quad \text{für } |\mu| < \eta m,$$

also wird

$$s_m = O(m^{h-1}) \sum_{|\mu| < \eta m} |\mu| e^{-\frac{\alpha \mu^2}{2m}} + O(m^h) = O(m^h).$$

Damit ist Satz 27 bewiesen. Der o -Fall ergibt für $h=0$ den o - $S_\alpha \rightarrow K$ -Satz, d. h. den Satz 26 mit der stärkeren Voraussetzung $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ anstatt $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Für $h=\frac{1}{2}$ ergibt der o -Fall: Aus $S_\alpha s = o(\sqrt{n})$ und $a_n = o(1)$ folgt $s_n = o(\sqrt{n})$. Insbesondere folgt aus $S_\alpha \text{-lim } s_n = s$ und $a_n = o(1)$ stets $s_n = o(\sqrt{n})$, und wir dürfen in dieser Aussage S_α durch E_p oder B oder T_α ersetzen. Daher ist es erlaubt, in Satz 23 die Voraussetzung $s_n = o(\sqrt{n})$ durch $a_n = o(1)$ zu ersetzen, wie bezüglich des RIESZschen Satzes schon von HARDY und LITTLEWOOD [2] festgestellt wurde.

Wir beweisen nun den Satz 26 und dürfen dazu $s=0$ setzen. Aus den Voraussetzungen folgt auf Grund des Satzes 27 zunächst, daß s_n beschränkt ist. Wählen wir daher eine positive Zahl a , so ist nach Satz 25 $F_a \text{-lim } s_n = 0$, also (vgl. den Übergang von t_m' zu $\bar{t}_m'$ in 5.3 mit $\eta = \frac{1}{2}$)

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|v| < n/2} e^{-\frac{av^2}{n}} s_{n+v} = o(1).$$

Zusammen mit (vgl. (5.3.2))

$$\sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| < n/2} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} = 1 + o(1), \quad \sum_{|\nu| < n/2} |\nu| e^{-\frac{a\nu^2}{n}} \approx \frac{n}{a},$$

$$|s_n - s_{n+\nu}| < \frac{|\nu| M}{\sqrt{n}} \quad \text{für } |\nu| < \frac{n}{2}$$

erhalten wir

$$s_n = \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| < n/2} e^{-\frac{a\nu^2}{n}} (s_n - s_{n+\nu}) + o(1),$$

$$|s_n| < \sqrt{\frac{a}{\pi n}} \sum_{|\nu| < n/2} |\nu| e^{-\frac{a\nu^2}{n}} + o(1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \frac{M}{\sqrt{\pi a}}.$$

Dies gilt für jedes $a > 0$, also ist $s_n = o(1)$. Damit ist Satz 26 bewiesen.

(Eingegangen am 3. April 1948.)

Schriftenverzeichnis.

L. BIEBERBACH.

- [1] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, 3, 1 (1909–1921), S. 379–532.

G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD.

- [2] Theorems concerning the summability of series by BOREL's exponential method, Rendiconti Circolo mat. Palermo 41 (1916), S. 36–58.

K. KNOPP.

- [3] Über das EULERSche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 226–253.

K. KNOPP.

- [4] Über das EULERSche Summierungsverfahren (II. Mitteilung), Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 125–156.

K. KNOPP.

- [5] Über Polynomentwicklungen im MITTAG-LEFFLERSchen Stern durch Anwendung der EULERSchen Reihentransformation, Acta math. 47 (1926), S. 313–335.

K. KNOPP.

- [6] Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C - und H -Verfahren, Math. Zeitschr. 47 (1942), S. 229–264.

F. LÖSCH.

- [7] Eine Verallgemeinerung der EULERSchen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 725–753.

M. MÜLLER.

- [8] Über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation, Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung 50 (1940), S. 93–104.

R. WATTS.

- [9] Das TAYLORSche Summierungsverfahren, Dissertation Tübingen (1935), 58 S.

Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Note „Sur la sommabilité de S. Bernstein et quelques procédés de sommation qui s'y rattachent“ [Rec. Math. (Nouvelle Série), Moscou, **21** (63), 1947, S. 13—22] bewies ich durch Umwege den folgenden Satz. Sei

$$s_n = \sum_{v=0}^n u_v, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad s_{-1} = u_{-1} = 0;$$

aus

$$(1) \quad B_n = \sum_{v=0}^n \cos\left(\frac{v\pi}{2n+1}\right) u_v \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

folgt

$$(2) \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \frac{s_{v-1} + s_v}{2} \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

und umgekehrt.

Einen direkten Beweis dieses Satzes erhält man, wenn man die B_n durch die σ_n ausdrückt. Drückt man nämlich nach (2) die u_v durch die σ_n aus und setzt sie in (1) ein, so erhält man mit Hilfe der Formel

$$\sin(2v+1)\alpha - 3\sin(2v-1)\alpha + 4\sin(2v-3)\alpha - 4\sin(2v-5)\alpha + \dots$$

$$\dots + (-1)^v 4\sin\alpha = -2\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha \sin 2v\alpha, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

die Beziehung

$$B_n = 2(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1}\right) \left\{ \sigma_n - n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1}\right) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(v+1) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2v+1}{2n+1}\right) \sigma_v}{n(n+1)/2} \right\}.$$

Danach folgt erstens (1) aus (2) da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{\pi}{4} 2 \int_0^1 t \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt \right\} s = s$$

ist.

Wegen

$$2(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1}\right) > \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

$$n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2v+1}{2n+1}\right) < 1,$$

ist zweitens

$$(3) \quad |B_n| > |\sigma_n| - \frac{\pi}{4} \frac{\sum_{v=0}^{n-1} (v+1) |\sigma_v|}{n(n+1)/2},$$

woraus, durch bekannte Schlußweise (2) aus (1) gefolgert wird, da $1 - \frac{\pi}{4} > 0$ ist.

Wäre nämlich $\sigma_n \neq O(1)$, so wäre für unendlich viele Indizes m ,

$$|\sigma_m| \geq |\sigma_v| \text{ für jedes } 0 \leq v \leq m,$$

also, wegen (3), auch

$$|B_m| \geq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) |\sigma_m|,$$

was $\sigma_n \neq O(1)$ widerspricht, da $B_n \rightarrow s$.

Wird weiter p so gewählt, daß

$$|\sigma_p| \rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n|, \quad p \rightarrow \infty,$$

so wird

$$|s| = \lim_{p \rightarrow \infty} |B_p| \geq \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ |\sigma_p| - \frac{\pi}{4} \frac{\sum_{v=0}^{p-1} (v+1) |\sigma_v|}{p(p+1)/2} \right\} \geq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n|;$$

da aber o. B. d. A. $s = 0$ vorausgesetzt werden kann, so folgt daraus die Behauptung.

(Eingegangen am 24. Juni 1948.)

Eine Bemerkung über die Dirichletschen L -Reihen.

Von

W. Stoll in Tübingen.

Es wird ein neuartiger Beweis des folgenden, zuerst von DIRICHLET bewiesenen Satzes gegeben:

Wenn p eine Primzahl der Form $4k - 1$ ist, und wenn $\left(\frac{-p}{k}\right)$ das KRONECKERSche Symbol bedeutet, dann gilt

$$L(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k} > 0.$$

Es wird benutzt werden:

1. Die Entwicklung

$$(1) \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k} \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

2. Einfache Sätze über LEGENDRESche und KRONECKERSche Symbole.

3. Aus der Theorie der DIRICHLET-Reihen

$$(2) \quad L(s, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k^s} = \prod_q \frac{1}{1 - \left(\frac{-p}{q}\right) q^{-s}} > 0,$$

wobei q alle Primzahlen durchläuft und $s > 1$ ist.

Beweis. Die Reste r_n mit $n^2 \equiv r_n \pmod{p}$, $n = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$ sind gerade alle quadratischen Reste modulo p in $0 < r_n < p$. Mit Gl. (1) wird

$$(3) \quad \begin{aligned} b &= \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{r_n}{p} = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p} \right) \\ &= \frac{p-1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p}. \end{aligned}$$

Dann ist für das LEGENDRESche Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)$:

$$(4) \quad 1 + \left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } m \text{ Rest ist, also } m = r_n \text{ für ein } n, \\ 0, & \text{wenn } m \text{ Nichtrest ist, also } m \neq r_n \text{ für alle } n. \end{cases}$$

Also wird

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{p-1} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(1 + \left(\frac{m}{p}\right)\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p} \\
 (5) \quad &= \frac{1}{2} \Im m \sum_{m=0}^{p-1} \left(e^{2\pi i \frac{k}{p}}\right)^m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p} \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p}.
 \end{aligned}$$

Wenn $(k, p) = 1$ ist, so durchläuft $s \equiv km$ ein reduziertes Restsystem modulo p , wenn m ein solches durchläuft. Also gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) \sin 2\pi k \frac{m}{p} &= \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{km}{p}\right) \sin 2\pi \frac{km}{p} \\
 (6) \quad &= \left(\frac{-p}{k}\right) \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) \sin 2\pi \frac{s}{p} = \left(\frac{-p}{k}\right) R.
 \end{aligned}$$

wobei $R = \Im m \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) e^{2\pi i \frac{s}{p}}$ gesetzt ist.

Aus Gl. (5) und (6) erhält man für $(k, p) = 1$

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sin 2\pi k \frac{r_n}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{-p}{k}\right) R.$$

Gl. (7) bleibt auch für $(k, p) > 1$, also $(k, p) = p$ richtig, da dann auf beiden Seiten dieser Gleichung Null steht. Aus Gl. (7) und (3) folgt

$$(8) \quad b = \frac{p-1}{4} - \frac{R}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k} = \frac{p-1}{4} - \frac{R}{2\pi} L(p).$$

Damit hat sich zugleich ergeben, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-p}{k}\right) \frac{1}{k^s}$ für $s = 1$ konvergiert, also konvergiert sie für $s \geq 1$ gleichmäßig. Daher erhält man unter Benutzung von Gl. (2)

$$(9) \quad L(p) = \lim_{s \rightarrow 1+0} L(s, p) \geq 0.$$

Wäre nun $L(p) = 0$, so wäre $p = 4b + 1$. Dies ist aber für $p = 3$ sicher nicht richtig, da dann $b = \frac{1}{3}$ ist. Für $p > 3$ ist aber b ganz, denn es gilt dann

$$(10) \quad pb = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} r_n \equiv \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} n^2 = p \frac{p^2-1}{24} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da aber p von der Form $4k - 1$ vorausgesetzt war, ist $p = 4b + 1$ mit ganzem b unmöglich. Es ist demnach $L(p) \neq 0$, also $L(p) > 0$, w. z. b. w.

Führt man die ganze Rechnung nochmals mit den Nichtresten t_n durch, ersetzt aber in Gl. (4) $1 + \left(\frac{m}{p}\right)$ durch $1 - \left(\frac{m}{p}\right)$, so erhält man ganz analog

$$(11) \quad \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} t_n = \frac{p-1}{4} + \frac{R}{2\pi} L(p),$$

oder mit Gl. (8)

$$(12) \quad \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{m}{p}\right) m = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} r_n - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} t_n = -\frac{R}{\pi} L(p).$$

Benutzt man weiter aus der Theorie der GAUSSschen Summen, daß $R > 0$ ist, so erhält man durch elementare Schlüsse leicht den Satz:

Die Anzahl aller quadratischen Reste zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$ ist kleiner als die Anzahl aller quadratischen Reste zwischen $\frac{1}{2}p$ und p , ($p = 4k-1$). (Vgl. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, S. 177ff., Satz 217—219.)

(Eingegangen am 5. September 1948.)

Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

W. Specht in Erlangen.

I.

Bezeichnet A die Norm

$$(1) \quad A = (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

einer algebraischen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$, so gilt bekanntlich für jede Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$ die Ungleichung

$$(2) \quad \xi \leq A.$$

Diese vom Grad n der Gleichung unabhängige Abschätzung ist im Falle $A > 1$ insofern genau, als Gleichungen hinreichend großen Grades mit der Norm A angegeben werden können, deren absolut größte Wurzeln einem vorgegebenen Werte vom Betrage A beliebig nahe kommen¹⁾.

Die Ungleichung (2) ist, wie die nachfolgenden Untersuchungen zeigen werden, Sonderfall einer allgemeineren Ungleichung. Es gilt nämlich der

Satz 1. *Die ihrer absoluten Größe $\xi_1 \geq \xi_2 \dots \geq \xi_n$ nach geordneten Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ mit der Norm A erfüllen die Ungleichungen*

$$(3) \quad |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq A \text{ und } |\xi_k| \leq \sqrt[k]{A} \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Schranke ist für jedes k in dem Sinne genau, daß Gleichungen hinreichend großen Grades n mit der Norm A angegeben werden können, deren k -te Wurzeln einem vorgegebenen Werte vom Betrage $\sqrt[k]{A}$ beliebig nahe kommen.

Für den Beweis dieses Satzes kann vorausgesetzt werden, daß die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich voneinander verschieden sind. Denn bekanntlich sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

¹⁾ Der triviale Fall $A = 1$ wird weiterhin stets ausgeschlossen.

stetige Funktionen ihrer Koeffizienten, während für eine Gleichung $f(x)=0$ mit mehrfachen Wurzeln stets eine Folge $f_m(x)=0$ von Gleichungen gleichen Grades angegeben werden kann, derart daß jede Gleichung der Folge lauter verschiedene Wurzeln besitzt und die Grenzbeziehung $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ besteht.

Ferner kann vorausgesetzt werden, daß wenigstens die ersten k Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ dem absoluten Betrage nach größer als 1 sind. Denn $|\xi_1| \leq 1$ führt sogleich auf $|\xi_1| \leq A$; für ein $k > 1$ aber kann aus $|\xi_k| \leq 1$ und der bereits als bekannt vorausgesetzten Ungleichung $|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1}| \leq A$ die verlangte Ungleichung $|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq A$ entnommen werden.

Gelten also für k verschiedene komplexe Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, deren absoluten Beträge größer als 1 sind, die Gleichungen

$$f(\xi_x) = \xi_x^n + a_1 \xi_x^{n-1} + a_2 \xi_x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

$$\text{oder} \quad 1 + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{\xi_x^\nu} = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, k),$$

so besteht mit beliebigen komplexen Werten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ auch die Gleichung

$$\sum_{x=1}^k \alpha_x + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \left(\sum_{x=1}^k \frac{\alpha_x}{\xi_x^\nu} \right) = 0,$$

aus der mit Hilfe der bekannten CAUCHYSCHEN Ungleichung²⁾

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^k |\alpha_x|^2 &= \left| \sum_{\nu=1}^n a_\nu \left(\sum_{x=1}^k \frac{\alpha_x}{\xi_x^\nu} \right) \right|^2 \leq (A^2 - 1) \sum_{\nu=1}^n \left| \sum_{x=1}^k \frac{\alpha_x}{\xi_x^\nu} \right|^2 \\ &\leq (A^2 - 1) \sum_{\nu=1}^n \sum_{x, \lambda=1}^k \frac{\alpha_x \bar{\alpha}_\lambda}{\xi_x^\nu \bar{\xi}_\lambda^\nu} = (A^2 - 1) \sum_{x, \lambda=1}^k \frac{\alpha_x \bar{\alpha}_\lambda}{\xi_x \bar{\xi}_\lambda - 1} \end{aligned}$$

folgt, da die auftretenden unendlichen Reihen absolut konvergieren. Die Hermitesche Form

$$H(\alpha) = \sum_{x, \lambda=1}^k \left(\frac{A^2 - 1}{\xi_x \bar{\xi}_\lambda - 1} - 1 \right) \alpha_x \bar{\alpha}_\lambda$$

in den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ nimmt demnach niemals negative Werte an, so daß insbesondere für ihre Determinante D die Ungleichung

$$D = \left| \frac{A^2 - 1}{\xi_x \bar{\xi}_\lambda - 1} - 1 \right| \geq 0$$

besteht. Da diese Determinante, wie gleich gezeigt wird, den Wert

$$(4) \quad D = \frac{(A^2 - 1)^{k-1} |\mathcal{A}(\xi)|^2}{\prod_{x, \lambda} (\xi_x \bar{\xi}_\lambda - 1)} \cdot (A^2 - |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k|^2)$$

besitzt, wenn $\mathcal{A}(\xi)$ das Differenzenprodukt $\mathcal{A}(\xi) = \prod_{1 \leq x < \lambda \leq k} (\xi_x - \xi_\lambda)$

bezeichnet, folgt damit sogleich die Ungleichung (3).

²⁾ Vgl. HARDY-LITTLEWOOD-POLYA, Inequalities, 2, 4.

Der Wert (4) der Determinante D läßt sich leicht aus der Identität

$$(5) \quad D(x, y) = \left| \frac{A^2 - 1}{x_\lambda y_\lambda - 1} - 1 \right| \\ = \frac{(A^2 - 1)^{k-1} \Delta(x) \Delta(y)}{\prod_{\lambda} (x_\lambda y_\lambda - 1)} \cdot (A^2 - x_1 x_2 \cdots x_k y_1 y_2 \cdots y_k)$$

entnehmen, die für jede Wertereihe $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k$ besteht, die die in $D(x, y)$ auftretenden Nenner nicht zum Verschwinden bringt. Offenbar ist, wenn zur Abkürzung $G(x, y) = \prod_{\lambda} (x_\lambda y_\lambda - 1)$ gesetzt

wird, der Ausdruck $G(x, y) D(x, y)$ eine ganzrationale Funktion der Größen x_λ, y_λ , die sowohl in den x_λ , als auch in den y_λ alternierend ist, weshalb eine Gleichung

$$G(x, y) D(x, y) = \Delta(x) \Delta(y) F(x, y)$$

mit einer in den x_λ bzw. y_λ symmetrischen ganzrationalen Funktion $F(x, y)$ besteht. Überdies bleibt $F(x, y)$, wie man sofort erkennt, unverändert, wenn jedes y_λ durch das entsprechende x_λ , und jedes x_λ durch das entsprechende y_λ ersetzt wird, eine Eigenschaft, die durch die Gleichung $F(x, y) = F(y, x)$ dargestellt wird.

Die Determinante $D(x, y)$ kann nun in eine Summe von Determinanten zerlegt werden:

$$D(x, y) = \left| \frac{A^2 - 1}{x_\lambda y_\lambda - 1} \right| - \sum \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{A^2 - 1}{x_1 y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2 - 1}{x_1 y_k - 1} \\ 1 & \frac{A^2 - 1}{x_2 y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2 - 1}{x_2 y_k - 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{A^2 - 1}{x_k y_2 - 1} & \cdots & \frac{A^2 - 1}{x_k y_k - 1} \end{array} \right|,$$

wobei die Summe über die Determinanten zu erstrecken ist, die aus der angegebenen durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der x_λ bzw. y_λ entstehen. Mithin ist

$$D(x, y) = (A^2 - 1)^k \left| \frac{1}{x_\lambda y_\lambda - 1} \right| - (A^2 - 1)^{k-1} (D_1 + D_2 + \cdots + D_k),$$

worin D_1 die Determinante

$$D_1 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{x_1 y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_1 y_k - 1} \\ 1 & \frac{1}{x_2 y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_2 y_k - 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{x_k y_2 - 1} & \cdots & \frac{1}{x_k y_k - 1} \end{array} \right|$$

bezeichnet und die Determinanten $D_2, D_3, \dots, D_k$ aus D_1 durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der x_κ bzw. y_κ hervorgehen. Nun gilt die Gleichung

$$G(x, y) \left| \frac{1}{x_\sigma y_\sigma - 1} \right| = \Delta(x) \Delta(y),$$

sodaß nur noch die Determinanten D_κ zu bestimmen sind.

Aus der Determinante D_1 entsteht aber, wenn die erste Zeile von den anderen Zeilen abgezogen und die Nenner der Elemente der ersten Zeile herausgenommen werden, die $(k-1)$ -reihige Determinante

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(x_1 y_1 - 1)}{(x_1 y_1 - 1)(x_1 y_2 - 1) \dots (x_1 y_k - 1)} \begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{x_2 y_2 - 1} y_2 \dots \frac{x_1 - x_k}{x_k y_k - 1} y_k \\ \vdots \\ \frac{x_1 - x_k}{x_k y_k - 1} y_2 \dots \frac{x_1 - x_k}{x_k y_k - 1} y_k \end{vmatrix} \\ &= \frac{(x_1 y_1 - 1) y_2 y_3 \dots y_k (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_k)}{(x_1 y_1 - 1)(x_1 y_2 - 1) \dots (x_1 y_k - 1)} \left| \frac{1}{x_\sigma y_\sigma - 1} \right| \\ &\quad (\sigma = 2, 3, \dots, k), \end{aligned}$$

sodaß schließlich folgt

$$D_1 = \frac{\Delta(x) \Delta(y)}{G(x, y)} \cdot S_1(x, y)$$

mit einer Funktion

$$(6) \quad S_1(x, y) = \frac{(x_1 y_1 - 1)(x_2 y_1 - 1) \dots (x_k y_1 - 1) y_2 y_3 \dots y_k}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \dots (y_1 - y_k)}.$$

Entsprechend ist

$$D_\kappa = \frac{\Delta(x) \Delta(y)}{G(x, y)} \cdot S_\kappa(x, y) \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k),$$

wobei wiederum die Funktionen $S_\kappa(x, y)$ aus $S_1(x, y)$ durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der x_κ bzw. y_κ hervorgehen. Daher gilt

$$G(x, y) D(x, y) = (A^2 - 1)^{k-1} \Delta(x) \Delta(y) (A^2 - 1 - S(x, y)),$$

worin $S(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y) + \dots + S_k(x, y)$ eine ganzrationale, in den Größen x_κ bzw. y_κ symmetrische Funktion bezeichnet, die überdies die Eigenschaft $S(y, x) = S(x, y)$ besitzt. Nun ist aber für $y_1 = 0$ bei beliebigen anderen Werten der Größen x_κ und y_κ , die die auftretenden Nenner nicht zum Verschwinden bringen,

$$S_1(x, y) = -1; S_\kappa(x, y) = 0 \text{ für } \kappa \neq 1, \text{ also } S(x, y) + 1 = 0,$$

weshalb $S(x, y) + 1$ durch y_1 teilbar ist. Dann ist aber wegen der eben angegebenen Eigenschaften von $S(x, y)$

$$1 + S(x, y) = C \cdot y_1 y_2 \dots y_k x_1 x_2 \dots x_k$$

mit einer konstanten Größe C , da $1 + S(x, y)$ höchstens vom Grade $2k$ ist.

Um C zu bestimmen, setze man $x_\kappa = \varrho^\kappa$; $y_\kappa = \varrho^{-\kappa}$ für $\kappa = 1, 2, \dots, k$ mit einer primitiven k -ten Einheitswurzel ϱ . Für diese Werte gilt nach (6)

$S_1(x, y) = S_2(x, y) = \dots = S_k(x, y) = 0$, also $1 + S(x, y) = 1$ und daher $C = 1$. Damit ist Formel (5) und folglich auch (4) bewiesen.

Außerdem ist noch zu zeigen, daß die Schranken in dem angegebenen Sinne genau sind. Bezeichnet α_m die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$(7) \quad x^{2m} - (A^2 - 1)(x^{2(m-1)} + x^{2(m-2)} + \dots + x^2 + 1) = 0,$$

so besitzt die Gleichung

$$(8) \quad f_m(x) = x^m - \frac{A^2 - 1}{\alpha_m^m} [(\alpha_m x)^{m-1} + (\alpha_m x)^{m-2} + \dots + \alpha_m x + 1] = 0$$

die Wurzel $\xi = \alpha_m$ und die Norm A .

Ist nun $A > 1$, so ist für alle hinreichend großen Grade m gewiß $A^2 > 1 + \frac{1}{m}$. Dann ist auch $\alpha_m > 1$ und daher wegen (7)

$$0 < \alpha_m^2 - 1 = (A^2 - 1) \frac{\alpha_m^{2m} - 1}{\alpha_m^{2m}} < A^2 - 1.$$

Die Gleichung

$$h(y) = y^m(y - 1) - (A^2 - 1)(y^m - 1) = 0$$

besitzt die beiden positiven Wurzeln 1 und α_m^2 , sodaß die Ableitung $h'(y)$ eine positive Nullstelle η zwischen 1 und α_m^2 besitzt. Wegen

$$h'(y) = (m + 1)y^m - mA^2y^{m-1}$$

findet man

$$\eta = \frac{m}{m+1} A^2 \quad \text{und} \quad A^2 - \frac{A^2}{m+1} \leq \alpha_m^2 < A^2.$$

Mithin gilt für die Folge der Gleichungen (8)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = A.$$

Die Gleichung

$$(9) \quad f_m(x^k) = x^{mk} - \frac{A^2 - 1}{\alpha_m^m} [(\alpha_m x^k)^{m-1} + (\alpha_m x^k)^{m-2} + \dots + \alpha_m x^k + 1] = 0$$

besitzt gleichfalls die Norm A und die k Wurzeln

$$\xi_\kappa = \varrho^\kappa \sqrt[k]{\alpha_m} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k),$$

worin ϱ eine primitive k -te Einheitswurzel bezeichnet. Für die Folge der Gleichungen (9) gilt daher

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = A;$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\xi_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_m|} = \sqrt[k]{A}.$$

Besitzt schließlich eine Gleichung $f(x) = 0$ die Norm A und die Wurzel ξ , so besitzt bei beliebigem ε vom Betrage $|\varepsilon| = 1$ die Gleichung $g(x) = \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1}x) = 0$ gleichfalls die Norm A und die Wurzel $\eta = \varepsilon \xi$. Damit ist der Satz 1 in allen seinen Teilen bewiesen.

Für reelle Gleichungen gilt insbesondere:

Satz 2. Die imaginären Wurzeln einer reellen Gleichung $f(x) = 0$ mit der Norm A liegen im Kreisbereich $z \leq \sqrt[A]{A}$ der Zahlenebene.

Denn da eine reelle Gleichung $f(x) = 0$ mit einer imaginären Wurzel ξ stets auch die konjugiertkomplexe Wurzel $\bar{\xi}$ besitzt, ist nach Satz 1

$$\xi \bar{\xi} \leq |\xi_1 \xi_2| \leq A \text{ oder } |\xi| \leq \sqrt[A]{A}.$$

Schließlich gestattet Satz 1 noch eine Ergänzung der Abschätzung der absoluten Potenzsummen, die ich früher angegeben habe³⁾:

Satz 3. Die absoluten Potenzsummen $S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \dots + |\xi_n|^m$ der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ mit der Norm A genügen für jedes positive m der Ungleichung

$$(10) \quad S_m \leq A^m + n - 1.$$

Der Beweis stützt sich auf folgende Bemerkung⁴⁾: Gelten für positive Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ die Ungleichungen

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0 \text{ und } a_1 a_2 \dots a_v \leq b_1 b_2 \dots b_v$$

$$(v = 1, 2, \dots, n),$$

so besteht auch die Ungleichung $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Da nämlich nach Satz 1 für jedes positive m die Ungleichungen

$$|\xi_1^m \xi_2^m \dots \xi_v^m| \leq A^m \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

gelten, hat man nur $a_v = |\xi_v^m|$ und $b_1 = A^m, b_2 = b_3 = \dots = b_n = 1$ zu setzen, um die Voraussetzungen zu erfüllen. Hieraus ergibt sich sogleich (10).

II.

Die Methode des ersten Abschnittes läßt eine Anwendung auf eine Frage ähnlicher Art zu, die ich bereits früher behandelt habe⁵⁾. Es ergeben sich dabei wesentlich schärfere Schranken.⁶⁾

³⁾ Vgl. W. SPECHT, Wurzelabschätzungen bei algebraischen Gleichungen. Jahresber. D. M. V. 49 (1939), 179—190, Satz 4.

⁴⁾ Vgl. a. a. O.³⁾, Satz 1.

⁵⁾ Vgl. W. SPECHT, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Jahresber. D. M. V. 48 (1938), 142—145.

⁶⁾ Auch hier werde der triviale Fall $\alpha=0$ ausgeschlossen.

Satz 4. Die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln ξ_v einer algebraischen Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ erfüllen mit

$$(11) \quad \alpha = \max (|\sqrt[n]{a_v}|) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

die Ungleichungen

$$(12) \quad |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}} \alpha^k;$$

$$\xi_k \leq (k+1)^{\frac{1}{2k}} \sqrt{\frac{k+1}{k}} \alpha \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Verbesserung der Abschätzungen läßt sich am deutlichsten aus einem Vergleich der gröberen Schranke

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}} \alpha^k < \sqrt{e(k+1)} \cdot \alpha^k$$

mit dem früheren Ergebnis

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \leq (k+1) \alpha^k$$

erkennen.

Setzt man zum Beweise des Satzes

$$x = \alpha y; a_v = \alpha^v b_v; \xi_v = \alpha \eta_v \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

so besitzt die algebraische Gleichung

$$g(y) = \frac{1}{\alpha^n} f(\alpha y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n = 0 \quad (|b_v| \leq 1)$$

die (der absoluten Größe nach geordneten) Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, für die insbesondere die Ungleichung $\eta_1 < 2$ besteht. Daher kann das Verfahren der vollständigen Induktion herangezogen und die Ungleichung

$$(13) \quad |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}| \leq \frac{k^{\frac{k}{2}}}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}}$$

als bewiesen angenommen werden.

Wir benötigen zum Beweise ferner die für $k > 1$ gültige Ungleichung

$$(14) \quad (k+1) \log(k+1) - 2k \log k + (k-1) \log(k-1) > 0,$$

$$k \log(k+1) - (2k-1) \log k + (k-1) \log(k-1) > 0,$$

die sehr leicht aus der für jeden Wert x des Intervalls $0 < x < 1$, insbesondere also für $x = \frac{1}{k}$ bei $k > 1$ gültigen Ungleichung

$$\frac{1}{x} \log(1-x^2) - \log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^m} \left(1 - \frac{2m^2 x}{(m+1)(2m+1)}\right) > 0$$

entwickelt werden kann.

Die Voraussetzung (13) erlaubt die weitere Annahme $|\eta_k| > 1$, da im Falle $|\eta_k| \leq 1$ aus (14) die Abschätzung

$$|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \leq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}| \leq \frac{k^{\frac{k}{2}}}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}} < \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}}$$

fließt. Schließlich können wir noch die Voraussetzung machen:

$$|\eta_k|^{k+\mu} > |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \text{ mit } \mu = \frac{\log(k+1)}{\log(k+1) - \log k},$$

da im Falle

$$|\eta_k|^{k+\mu} \leq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \text{ oder } |\eta_k|^{k+\mu-1} \leq |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}|$$

aus (13) und (14) die Ungleichung

$$\begin{aligned} (k + \mu - 1) \log |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| &\leq (k + \mu) \log |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{k-1}| \\ &\leq \frac{k+\mu}{2} (k \log k - (k-1) \log(k-1)), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \log |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| &\leq \\ \frac{1}{2} \frac{((k+1) \log(k+1) - k \log k)(\log(k+1) - \log k)}{(\log(k+1) - \log k)(k \log(k+1) - (k-1) \log k)} \cdot (k \log k - (k-1) \log(k-1)) \\ &< \frac{1}{2} ((k+1) \log(k+1) - k \log k) \end{aligned}$$

folgt.

Damit haben wir, wenn

$$(15) \quad \mu = \frac{\log(k+1)}{\log(k+1) - \log k}; \quad \lambda = \frac{1}{k+\mu}; \quad u = |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k|^\lambda$$

gesetzt wird, die Voraussetzung

$$(16) \quad |\eta_1| \geq |\eta_2| \geq \dots \geq |\eta_k| > u > 1,$$

wobei noch, ebenso wie im Beweise des Satzes 1, die Einschränkung gemacht werden darf, daß die Größen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sämtlich voneinander verschieden sind.

Dann gilt mit beliebigen komplexen Werten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ die Gleichung

$$\sum_{x=1}^k \alpha_x + \sum_{v=1}^n b_v \left(\sum_{x=1}^k \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right) = 0,$$

aus der mit Hilfe der CAUCHYSCHEN Ungleichung unter Heranziehung der in (15) eingeführten positiven Größe u folgt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_x \alpha_x \right|^2 &\leq \left| \sum_{v=1}^n b_v \left(\sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right) \right|^2 \leq \left(\sum_{v=1}^n \left| b_v \sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right|^2 \right) \leq \left(\sum_{v=1}^n \left| \sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{v=1}^n \left| \sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right|^2 u^{2v} \cdot \frac{1}{u^{2v}} \right) \leq \sum_{v=1}^n \left| \sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right|^2 u^{2v} \cdot \sum_{v=1}^n \frac{1}{u^{2v}} \\ &\leq \sum_{v=1}^{\infty} \left| \sum_x \frac{\alpha_x}{\eta_x^v} \right|^2 u^{2v} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{u^{2v}} = \frac{u^2}{u^2 - 1} \sum_{x,\lambda=1}^k \frac{\alpha_x \bar{\alpha}_\lambda}{\eta_x \eta_\lambda - u^2}, \end{aligned}$$

da sämtliche unendlichen Reihen wegen (16) absolut konvergieren.

Infolgedessen nimmt die HERMITESCHE Form

$$H(\alpha) = \sum_{x, \lambda} \left(\frac{u^2}{u^2 - 1} \cdot \frac{1}{\eta_x \bar{\eta}_\lambda - u^2} - 1 \right) \alpha_x \bar{\alpha}_\lambda$$

niemals negative Werte an, so daß insbesondere ihre Determinante

$$D = \left| \frac{u^2}{(u^2 - 1)(\eta_x \bar{\eta}_\lambda - u^2)} - 1 \right| \geq 0.$$

Setzt man hierin

$$\frac{1}{u^2 - 1} = A^2 - 1; \quad \eta_x = u \xi_x \quad (x = 1, 2, \dots, k),$$

so folgt nach (4) die Ungleichung

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k|^2 \leq A^2 \text{ oder } |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k|^2 \leq u^{2k} \cdot \frac{u^2}{u^2 - 1}$$

und mit (15)

$$(16) \quad u^{2\mu} (u^2 - 1) \leq u^2.$$

Da in (16) das Gleichheitszeichen allein für den Wert $u_0 = \sqrt{\frac{k+1}{k}} > 1$ erreicht wird, ist demnach für jeden anderen Wert u , der (16) erfüllt, $u \leq u_0$ und damit

$$|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| = u^{k+\mu} \leq \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{k+\mu}{2}} = \frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}}.$$

Für reelle Gleichungen läßt sich aus Satz 4 insbesondere entnehmen:

Satz 5. *Die imaginären Wurzeln einer reellen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad \text{mit} \quad |\sqrt[n]{a_n}| \leq \alpha$$

liegen im Kreisbereich $|\varrho| \leq \frac{1}{2} \sqrt[4]{108} \cdot \alpha < 1,612 \alpha$.

Für eine imaginäre Wurzel ξ der reellen Gleichung $f(x) = 0$ ist nämlich

$$\xi \bar{\xi} \leq |\xi_1 \xi_2| \leq \frac{1}{2} \sqrt[4]{27} \alpha^2 \text{ oder } |\xi| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{27} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt[4]{108} \alpha.$$

Satz 4 liefert für die Abschätzung der absoluten Potenzsummen einer algebraischen Gleichung nicht wesentlich mehr als die früher bereits mitgeteilten Ergebnisse⁷⁾, obwohl sie verbessert werden können. Denn es gilt

Satz 6. *Die absoluten Potenzsummen* $S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \dots + |\xi_n|^m$ *der Wurzeln einer algebraischen Gleichung*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

⁷⁾ Vgl. a. a. O.³⁾, Satz 2.

erfüllen mit

$$\alpha = \max (|a_v|) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

für jedes ganze positive m die Ungleichung

$$(17) \quad S_m \leq (n + \gamma_m) \alpha^m$$

mit einer vom Grade n unabhängigen Konstanten γ_m , insbesondere ist

$$(17.1) \quad S_1 \leq \left(n + 1 - \frac{2}{n+2} \right) \alpha < (n+1) \alpha.$$

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe der schon für Satz 2 herangezogenen Bemerkung aus dem

Satz 7. Es seien $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq 0$ die der Größe nach geordneten absoluten Beträge der Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$; man setze für $k = 1, 2, \dots, n$ $\varrho_k = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$; $\sigma_k = \max (1, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-k+1})$; $\delta_k = \min (\varrho_k, \sigma_k)$.

Dann gilt für die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln ξ_v der Gleichung $f(x) = 0$

$$(18) \quad |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq \delta_k$$

$$(19) \quad S_m = |\xi_1|^m + |\xi_2|^m + \dots + |\xi_n|^m \\ \leq \delta_1^m + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^m + \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} \right)^m + \dots + \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \right)^m$$

bei beliebigem positivem m .

Ehe wir an den Beweis des Satzes 7 gehen, wollen wir aus ihm die Ungleichungen (17) und (17.1) herleiten.

Setzen wir wie früher $x = \alpha y$, $a_v = \alpha^v b_v$, $\xi_v = \alpha \eta_v$ für $v = 1, 2, \dots, n$, so hat die Gleichung

$$g(y) = \frac{1}{\alpha^n} f(\alpha y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n = 0 \text{ mit } |b_v| \leq 1$$

die Wurzeln η_v . Nach Satz 7 erhalten wir

$$\varrho_k \leq 1 + k; \quad \sigma_k \leq n - k + 1; \quad \delta = \min (1 + k, n - k + 1)$$

und daher

$$|\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \leq 1 + k \quad \text{für } 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2} \right]; \\ |\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k| \leq n - k + 1 \quad \text{für } \left[\frac{n}{2} \right] < k \leq n.$$

Daraus folgt für gerades $n = 2s$

$$S_1^* = |\eta_1| + |\eta_2| + \dots + |\eta_n| \\ \leq 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{s+1}{s} + \frac{s-1}{s} + \dots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ = 2s + 1 - \frac{1}{s+1} = n + \frac{n}{n+2},$$

dagegen für ungerades $n = 2s + 1$

$$S_1^* \leq 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{s+1}{s} + 1 + \frac{s}{s+1} + \frac{s-1}{s} + \cdots + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ = 2s + 2 - \frac{1}{s+1} = n + \frac{n-1}{n+1},$$

sodaß (17.1) in beiden Fällen erfüllt ist. Auf ähnlichem Wege erhält man für ein beliebiges ganzes m

bei $n = 2s$:

$$S_m^* = |\eta_1|^m + |\eta_2|^m + \cdots + |\eta_n|^m \\ = \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma+1}{\sigma} \right)^m + \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^m$$

bei $n = 2s + 1$:

$$S_m^* = |\eta_1|^m + |\eta_2|^m + \cdots + |\eta_n|^m \\ = \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma+1}{\sigma} \right)^m + 1 + \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^m$$

und weiter

$$\sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma+1}{\sigma} \right)^m + \sum_{\sigma=1}^s \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^m \\ = 2s + 2 \binom{m}{2} \sum_{\sigma} \frac{1}{\sigma^2} + 2 \binom{m}{4} \sum_{\sigma} \frac{1}{\sigma^4} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{s+1} \right)^m \\ < 2s + \left(1 - \frac{1}{s+1} \right)^m + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \binom{m}{2\mu} \zeta(2\mu)$$

mit der bekannten Zetafunktion $\zeta(s)$. Damit folgt

$$S_m^* < n + \left(\frac{n}{n+2} \right)^m + 2 \sum_{\mu} \binom{m}{2\mu} \zeta(2\mu) \leq n + \gamma_m$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten γ_m .

Für den Beweis des Satzes 7 ziehen wir einen Hilfssatz über die charakteristischen Wurzeln einer Matrix heran⁸⁾: Setzt man für eine Matrix $A = (a_{\kappa\lambda})$ des Grades n

$$z_{\kappa} = \sum_{\lambda} |a_{\kappa\lambda}|; \quad s_{\lambda} = \sum_{\kappa} |a_{\kappa\lambda}|; \quad z = \max(z_{\kappa}); \quad s = \max(s_{\lambda}) \\ (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, n),$$

so gilt für jede charakteristische Wurzel ω der Matrix die Ungleichung

$$|\omega| \leq \min(z, s).$$

Wir wenden dies insbesondere auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

⁸⁾ Vgl. a. a. O. ⁵⁾.

die die charakteristische Gleichung

$$|xE - A| = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

besitzt, und auf ihre k -te Determinantenmatrix $C_k(A)$ des Grades $\binom{n}{k}$ an, die aus den k -reihigen Unterdeterminanten der Matrix A besteht und bekanntlich die charakteristischen Wurzeln $\eta = \xi_{\kappa_1} \xi_{\kappa_2} \dots \xi_{\kappa_k}$ für alle Reihen $1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_k \leq n$ besitzt, wenn wieder $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die ihrer absoluten Größe nach geordneten Wurzeln der Matrix A sind.

Zur Abschätzung der Größen η haben wir aus je k Spalten bzw. aus je k Zeilen der Matrix A die Unterdeterminanten zu entnehmen, ihrem Betrage nach abzuschätzen und aus diesen Werten die Summe zu bilden. Die Unterdeterminanten aus je k Spalten ergeben die Abschätzung⁹⁾

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq 1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k.$$

Greifen wir dagegen k Zeilen aus A heraus, unter denen die erste Zeile nicht vorkommt, so hat offenbar genau eine Unterdeterminante den Betrag 1, während alle anderen verschwinden. Wählen wir aber die erste Zeile und $k-1$ beliebige andere Zeilen, so können diese nach Umordnung der Spalten in der Gestalt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} -a_{\kappa_1} & -a_{\kappa_2} & \dots & -a_{\kappa_{k-1}} & -a_{\lambda_1} & -a_{\lambda_2} & \dots & -a_{\lambda_{n-k+1}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine hieraus gebildete k -reihige Unterdeterminante wird Null, wenn sie zwei von den letzten $n-k+1$ Spalten enthält. Die aus den ersten $k-1$ Spalten und einer weiteren Spalte gebildeten Unterdeterminanten aber ergeben den Ausdruck

$$|a_{\lambda_1}| + |a_{\lambda_2}| + \dots + |a_{\lambda_{n-k+1}}| \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-k+1}.$$

Mithin ist auch

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq \max(1, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-k+1}),$$

wie zu zeigen war. Alles Weitere läßt sich nun hieraus ohne Schwierigkeit entnehmen.

⁹⁾ Vgl. a. a. O. ⁵⁾.

(Eingegangen am 23. Juli 1948.)

Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen.

Von

Wolfgang Haack in Bad Gandersheim.

In einem Strahlenkomplex wird die Umgebung I. Ordnung eines Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ durch die Formel von KOENIGS¹⁾ bestimmt, aus der sich unmittelbar drei PFAFFsche Differentialformen ergeben. Wir wollen einleitend beschreiben, wie man zu den Formen kommt. Bekanntlich ist jeder Punkt z des Strahles $\mathfrak{A}$ die Spitze eines Kegels, dessen Erzeugenden dem Komplex angehören. Wandert z auf $\mathfrak{A}$, so dreht sich die Tangentenebene des Komplexkegels, die durch $\mathfrak{A}$ geht, um $\mathfrak{A}$. Dem uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{A}$ ist der Zylinder des Komplexes zugeordnet. Auf $\mathfrak{A}$ gibt es einen Punkt γ , den *Zentralpunkt*, dessen Kegel den Zylinder in $\mathfrak{A}$ senkrecht schneidet. Ausgehend vom Zentralpunkt läßt sich die Formel von KOENIGS einfach erklären. Wir betrachten eine beliebige Regelfläche des Komplexes durch $\mathfrak{A}$. Ihr reziproker Drall sei δ ; der Abstand ihres Kehlpunktes von γ sei $\bar{\varphi}$, und ihre Kehlpunktnormale bilde mit der Tangentenebene des Zylinders den Winkel φ . Dann lautet die *Formel von KOENIGS*:

$$(1) \quad \bar{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = \delta - k,$$

dabei ist k die einzige Invariante I. Ordnung des Komplexes, der *Hauptdrall*. Wir setzen $k \neq 0$ voraus. Sind zwei der drei Größen $\bar{\varphi}$, δ , φ gegeben, so ist im allgemeinen die dritte aus (1) bestimmt. Nur drei Klassen von Regelflächen des Komplexes bilden Ausnahmen, für sie bleibt die dritte Größe unbestimmt²⁾. Die drei Klassen sind:

1. $\delta = k; \bar{\varphi} = 0,$
- (2) 2. $\bar{\varphi} = 0; \varphi = \frac{\pi}{2},$
3. $\delta = k; \varphi = 0.$

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde³⁾, erfüllen die Regelflächen jeder Klasse je eine *PFAFFsche Differentialgleichung*, die im allgemeinen nicht integrabel ist. Es liegt daher die Frage nahe, ob es nicht-entartete Strahlenkomplexe gibt, in denen eine, zwei oder alle drei PFAFF-

¹⁾ G. KOENIGS, La géométrie réglée et ses applications, Paris 1895.

²⁾ SANNIA, Saggio di geom. diff. dei complessi di retta, Ann. di Math. III, 17 179—223.

³⁾ W. HAACK, Diff. Geom. d. Strahlenkomplexe I, Math. Z. 40 (1935) 560—581.

sehen Formen vollständig integrabel sind. Die Frage läßt sich beantworten und die entsprechenden Komplexe lassen sich bestimmen, ohne die allgemeine Theorie der Strahlenkomplexe heranzuziehen.

Wir geben zunächst einen Überblick über die Regelflächen der drei ausgezeichneten Klassen, aus dem sich der Gang der folgenden Untersuchung ergibt. Die Regelflächen der ersten Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben sämtlich den gleichen Drall und den gleichen Kehlpunkt. Ist die I. PFAFFSche Differentialgleichung vollständig integrabel, so bilden ihre durch $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen ein Strahlensystem, und zwar ein isotropes Strahlensystem, das bekanntlich dadurch gekennzeichnet ist, daß die durch denselben Strahl gehenden Regelflächen gleichen Drall und gleichen Kehlpunkt besitzen. Daher gilt der

Satz 1. *Ist in einem Strahlensystem die I. PFAFFSche Form vollständig integrabel, so besteht der Komplex aus einer Schar isotroper Strahlensysteme⁴⁾.*

Die isotropen Strahlensysteme stehen in enger Beziehung zu den Minimalflächen. Nach RIBAUCOUR ist die Mittenhüllfläche eines isotropen Strahlensystems eine Minimalfläche⁵⁾. Daher gehört zu jedem Komplex mit integraler I. Linearform eine Schar von Minimalflächen, die in besonderen Fällen in eine einzige Minimalfläche zusammenfallen können.

Die Regelflächen der II. Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben wegen $\overline{\varphi} = 0$ denselben Kehlpunkt, der mit dem Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, und berühren im Kehlpunkt den Zylinder des Komplexes, d. h. die Regelflächen haben nicht nur den Kehlpunkt, sondern sogar die Kehlpunktnormale gemeinsam.

Die Regelflächen der III. Klasse, die durch $\mathfrak{A}$ gehen, haben den gleichen Drall und schneiden in den Kehlpunkten, die im allgemeinen voneinander verschieden sind, den Zylinder senkrecht. Die Zylinder des Komplexes gehören als Grenzfall den beiden letzten Klassen an.

Satz 2. *Sind die linearen Differentialformen, die die Regelflächen der II. bzw. III. Klasse bestimmen, integrabel, so bilden die durch $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen jeder Klasse ein Strahlensystem, dabei sind diejenigen der II. Klasse zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl den gleichen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. Dagegen sind die Systeme der III. Klasse solche zylindrischen Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl $\mathfrak{A}$ den gleichen Drall, aber verschiedene Kehlpunkte haben.*

Wir beginnen mit der Frage, ob es solche zylindrischen Strahlensysteme überhaupt gibt. Denn andernfalls kann es auch keine Komplexe geben, deren II. und III. Form integrabel sind. Es ist überraschend, daß diese beiden Klassen von Strahlensystemen bisher in der Literatur

⁴⁾ K. ZINDLER, Liniengeometrie m. Anw., Berlin 1906.

⁵⁾ A. RIBAUCOUR, Etudes des élassoïdes ou surfaces à courbure nulle. Acad. royale de Belg. XLIV 1881.

nicht beachtet wurden, zumal da die isotropen Strahlensysteme so häufig den Gegenstand geometrischer Untersuchungen bildeten. In neueren Darstellungen kennzeichnet man die isotropen Strahlensysteme meist durch die Eigenschaft, daß alle durch den betrachteten Strahl gehenden reellen Regelflächen des Systems den gleichen Drall haben, und leitet daraus ab, daß dann auch die Kehlpunkte der Regelflächen zusammenfallen. Der gemeinsame Drall bzw. der gemeinsame Kehlpunkt erscheinen als Eigenschaften, die sich gegenseitig bedingen. Das ist jedoch nur solange richtig, wie man zylindrische Strahlensysteme ausschließt. Läßt man auch zylindrische Strahlensysteme zu, so gibt es solche, deren Regelflächen gemeinsamen Drall, aber verschiedene Kehlpunkte und umgekehrt gemeinsamen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. In beiden Fällen sind die Zylinder der Systeme Ebenen.

Im zweiten Teil werden wir eine explizite Parameterdarstellung der Komplexe mit integralen Differentialformen ableiten; dabei gehen wir aus von der RIBAUCCOURSCHEN Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch zwei konjugiert imaginäre Minimalkurven und bestimmen zunächst alle Komplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten, deren I. Form also integral ist. Sie sind bestimmt durch zwei willkürliche Funktionen zweier Veränderlicher. Anschließend wird gezeigt, daß die reellen Komplexe mit drei integralen Linearformen durch zwei willkürliche Funktionen einer komplexen Veränderlichen bestimmt sind.

Wenn auch die folgenden Entwicklungen unabhängig von der allgemeinen Theorie der Strahlenkomplexe durchgeführt werden, so wollen wir hier doch auf den Zusammenhang mit der Theorie hinweisen⁶⁾. Ein Strahlenkomplex besitzt eine Invariante I. Ordnung, den Hauptdrall k , und außer den invarianten Ableitungen von k noch drei Invarianten II. Ordnung p, q, r . Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität der I. Linearform ist $r = 0$, diejenige der II. oder III. Linearform $q = 0$. Wenn also eine der beiden letzten Formen integral ist, so ist es auch die andere. Ist in einem Komplex $q = 0$, so sind die Zylinder des Komplexes Ebenen.

Aus der expliziten Parameterdarstellung wird im letzten Abschnitt der Zusammenhang mit den Minimalflächen entwickelt. Insbesondere ergibt sich eine geometrische Deutung für die von WEIERSTRASS angegebene integralfreie Darstellung der Minimalflächen. Der Sonderfall, in dem die Schar der Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme des Komplexes in ein und dieselbe Minimalfläche zusammenfallen, wird zum Schluß genauer behandelt. Zu jeder reellen Minimalfläche gibt es höchstens ∞^4 reelle Strahlenkomplexe mit integralen PFAFFschen Formen.

⁶⁾ W. HAACK, Differentialgeometrie Teil II, Wolfenbüttel 1948.

I. Zylindrische Strahlensysteme.

Zur Darstellung der Geraden des Euklidischen Raumes bedienen wir uns der STUDYSchen dualen Einheitsvektoren. Mit den von CLIFFORD eingeführten dualen Zahlen, deren duale Einheit ε durch $\varepsilon^2 = 0$ gekennzeichnet ist, faßt STUDY zwei Vektoren α , $\bar{\alpha}$, von denen α ein Einheitsvektor in Richtung der darzustellenden Geraden $\mathfrak{A}$ ist und $\bar{\alpha}$ das Moment der in $\mathfrak{A}$ wirkenden Einheitskraft in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt angibt, zum dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{A} = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \alpha\alpha + 2\varepsilon\alpha\bar{\alpha} = 1$$

zusammen. Wir werden künftig duale Größen durch große Buchstaben wiedergeben. Den Realteil bezeichnen wir mit dem entsprechenden kleinen, den Dualteil mit dem überstrichenen kleinen Buchstaben. Es ist wohl das Verdienst von W. BLASCHKE, den Vorteil der Verwendung dualer Vektoren für die metrische differentielle Liniengeometrie erkannt und genutzt zu haben.

Fällt man vom Koordinatenanfangspunkt das Lot auf die Gerade $\mathfrak{A}$, so genügt der Ortsvektor $\underline{\alpha}$ des Lotfußpunktes der Gleichung

$$(I\ 1) \quad \underline{\alpha} = \alpha \times \bar{\alpha}.$$

Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{z}$ der Geraden $\mathfrak{A}$ läßt sich daher in der Form schreiben ⁷⁾

$$(I\ 2) \quad \mathfrak{z} = (\alpha \times \bar{\alpha}) + \mu \alpha.$$

1. Ebene Zylinder. Sind die Komponenten der Vektoren α , $\bar{\alpha}$ Funktionen eines Parameters w , so beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Regelfläche und insbesondere einen Zylinder, wenn α konstant ist. Durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}(w) = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha}(w)$$

wird also ein Zylinder gegeben. Der Punkt z mit den Gleichungen

$$(I\ 3) \quad \mathfrak{z}(w) = (\alpha \times \bar{\alpha}(w)) + \mu(w) \alpha$$

beschreibt eine Kurve des Zylinders. Der Zylinder ist dann und nur dann eben, wenn $\mathfrak{z}(w)$ für jede Funktion $\mu(w)$ eine ebene Kurve ist, oder wenn die Schmiegungsebene von $\mathfrak{z}(w)$ den Zylinder berührt, d. h. wenn die Gleichung gilt:

$$(\alpha \mathfrak{z}_w \mathfrak{z}_{ww}) = 0; \quad \mathfrak{z}_w = \frac{d\mathfrak{z}}{dw}; \quad \mathfrak{z}_{ww} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dw^2}.$$

Setzen wir hier für z den Ausdruck (I 3) ein, so folgt

$$(\alpha, \alpha \times \bar{\alpha}_w, \alpha \times \bar{\alpha}_{ww}) = 0$$

⁷⁾ BLASCHKE, Analytische Geometrie, Wolfenbüttel 1948. HAACK, Diff. Geom. II.

oder

$$[\alpha \times (\alpha \times \bar{a}_w)] \cdot (\alpha \times \bar{a}_{ww}) = 0,$$

$$[(\alpha \alpha_w) \alpha - (\alpha \alpha) \bar{a}_w] \cdot (\alpha \times \bar{a}_{ww}) = 0$$

und daraus

$$(I4) \quad (\alpha \bar{a}_w \bar{a}_{ww}) = 0.$$

Durch Quadrieren des Spatproduktes ergibt sich sofort, daß (I4) gleichwertig ist mit

$$(I4a) \quad |\bar{a}_w \times \bar{a}_{ww}| = 0.$$

Die Gerade $\mathfrak{A}(w)$ beschreibt einen Zylinder, wenn $\alpha = \text{const}$ ist und $\bar{a}(w)$ der Gleichung (I4) oder (I4a) genügt.

2. Zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen gleichen Drall haben. Die Komponenten des dualen Vektors $\mathfrak{A}$ seien Funktionen der zwei Parameter t, w . Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{A}$ ein zylindrisches System ist, und daß die Regelflächen $t = \text{const}$ die Zylinder des Systems sind. Dann ist α unabhängig von w , und wir können schreiben

$$(I5) \quad \mathfrak{A}(t, w) = \alpha(t) + \varepsilon \bar{a}(t, w).$$

Denken wir t und w als Funktionen eines Parameters σ , so beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Regelfläche des Systems. Die Ableitungen nach σ bezeichnen wir durch Punkte. Dann ist

$$(I6) \quad \dot{\mathfrak{A}} = \alpha_t \dot{t} + \varepsilon (\bar{a}_t \dot{t} + \bar{a}_w \dot{w})$$

und das Skalarprodukt

$$(I7) \quad \mathfrak{A} \dot{\mathfrak{A}} = \alpha_t \alpha_t \dot{t}^2 + \varepsilon (2(\alpha_t \bar{a}_t) \dot{t}^2 + 2(\alpha_t \bar{a}_w) \dot{t} \dot{w}).$$

Der reziproke Drall δ der Regelfläche $\mathfrak{A}(\sigma)$ ist bekanntlich der halbe Quotient aus dem dualen und realen Teil von $\mathfrak{A} \dot{\mathfrak{A}}$:

$$(I8) \quad \delta = \frac{(\alpha_t \bar{a}_t) \dot{t} + (\alpha_t \bar{a}_w) \dot{w}}{(\alpha_t \alpha_t) \dot{t}}.$$

Wenn die durch den betrachteten Strahl $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen sämtlich den gleichen Drall haben, muß δ unabhängig von $\dot{t} : \dot{w}$ sein. Das ist nur der Fall, wenn die Gleichung gilt

$$(I9) \quad \alpha_t \bar{a}_w = 0.$$

Damit sind die zylindrischen Strahlensysteme, deren Regelflächen gemeinsamen Drall haben, gekennzeichnet. Wir wollen zeigen: Aus (I9) folgt, daß die Zylinder des Systems eben sind. Aus den Gleichungen (I5) folgt durch Differentiation

$$(I9a) \quad \alpha \alpha_t = 0, \quad \alpha \bar{a}_w = 0, \quad \alpha \bar{a}_{ww} = 0,$$

und wegen (I9)

$$\alpha_t \bar{a}_{ww} = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß $\mathbf{a}$ senkrecht zu $\bar{\mathbf{a}}_w$ und $\bar{\mathbf{a}}_{vw}$ ist und ferner, daß $\mathbf{a}_t$ senkrecht zu $\bar{\mathbf{a}}_w$ und $\bar{\mathbf{a}}_{vw}$ ist. Dann müssen entweder $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}_t$ einander parallel sein, oder $\bar{\mathbf{a}}_w$ ist parallel $\bar{\mathbf{a}}_{vw}$. Ist $\mathbf{a}_t \neq 0$, so ist der erste Fall wegen $\mathbf{a} \mathbf{a}_t = 0$ bei reellen Vektoren nicht möglich, daher gilt

$$(I\ 10) \quad \bar{\mathbf{a}}_w \times \bar{\mathbf{a}}_{vw} = 0.$$

Nach (I4a) sind also die Zylinder des Systems eben.

3. Zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen gleichen Kehlpunkt haben. Schließen wir Bündel paralleler Strahlen aus, so sind die Regelflächen $w = \text{const}$ sicher keine Zylinder; sie besitzen also eine Kehlpunktnormale. Wir übernehmen die Formeln (I5) bis (I8) und berechnen zunächst die Kehlpunktnormale $\mathfrak{N}^0$ der Regelflächen $w = \text{const}$. Es ist

$$(I\ 11) \quad \mathfrak{N}^0 = \frac{\mathfrak{A}_t}{\sqrt{\mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_t}} = \frac{\mathbf{a}_t + \varepsilon \bar{\mathbf{a}}_t}{\sqrt{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t}} \left(1 - \varepsilon \frac{\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_t}{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t} \right).$$

Wird durch $\dot{t}$, $\dot{w}$ eine beliebige Fortschrittingsrichtung im Strahlensystem gegeben, so ist die Kehlpunktnormale der zugehörigen Regelfläche

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A} \mathfrak{A}}}.$$

Nach (I7) folgt durch einfache Umformung

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A} \mathfrak{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t \dot{t}}} \left[1 - \varepsilon \frac{(\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_t) \dot{t} + (\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_w) \dot{w}}{(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t) \dot{t}} \right]$$

und daraus

$$(I\ 12) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t \dot{t}}} [\mathbf{a}_t \dot{t} + \varepsilon (\bar{\mathbf{a}}_t \dot{t} + \bar{\mathbf{a}}_w \dot{w})] \left[1 - \varepsilon \frac{(\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_t) \dot{t} + (\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_w) \dot{w}}{(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t) \dot{t}} \right].$$

Es sei $\mathfrak{R}$ die Gerade, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}^0$ senkrecht schneidet; sie wird bestimmt durch das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}^0$. Nach (I11) läßt sich $\mathfrak{R}$ darstellen

$$(I\ 13) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{N}^0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t}} \left(1 - \varepsilon \frac{\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_t}{\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t} \right) (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_t + \varepsilon [(\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{a}}_t) + (\bar{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}_t)]).$$

Wenn die Regelflächen des Strahlensystems gemeinsame Kehlpunkte haben, müssen sich die Geraden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ schneiden, unabhängig von der Richtung $\dot{t} : \dot{w}$. Zwei Geraden schneiden sich, wenn der Dualteil ihres Skalarproduktes verschwindet. Unter Beachtung von $\varepsilon^2 = 0$ bilden wir das Skalarprodukt

$$\mathfrak{R} \mathfrak{N} = \frac{\varepsilon}{(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t \dot{t})} [((\mathbf{a}_t \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}_t) + (\bar{\mathbf{a}}_t \mathbf{a} \mathbf{a}_t)) \dot{t} + (\bar{\mathbf{a}}_w \mathbf{a} \mathbf{a}_t) \dot{w}]$$

oder

$$(I\ 14) \quad \mathfrak{R} \mathfrak{N} = \varepsilon \frac{(\mathbf{a} \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{a}}_w) \dot{w}}{(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t) \dot{t}}.$$

Da der Realteil von $\Re \mathfrak{R}$ unabhängig von $t:w$ verschwindet, ergibt sich die Tatsache: *In jedem zylindrischen Strahlensystem sind die Kehlpunktnormalen aller durch einen Strahl gehenden Regelflächen zueinander parallel.* Wenn die Kehlpunkte zusammenfallen, haben daher alle Regelflächen dieselbe Kehlpunktnormale. Die rechte Seite von (I 14) muß unabhängig von $t:w$ sein, d. h. es ist

$$(I\ 15) \quad (a_t \bar{a}_w) = 0.$$

Das ist die Bedingung dafür, daß die Regelflächen des zylindrischen Strahlensystems gemeinsame Kehlpunkte haben.

Wir wollen zeigen: *Ist in einem zylindrischen Strahlensystem die Bedingung (I 15) erfüllt, so sind die Zylinder des Systems Ebenen.* Ausgehend von (I 9a) nehmen wir an, a_t sei nicht parallel zu $\bar{a}_w$; dann können wir nach den beiden ersten Gleichungen (I 9a) schreiben

$$a = \lambda (a_t \times \bar{a}_w).$$

Jetzt folgt aber aus (I 15) unter Voraussetzung reeller Vektoren

$$(I\ 16) \quad a_t \times \bar{a}_w = 0$$

entgegen unserer Annahme. Daher gilt

$$a_t = \nu \bar{a}_w.$$

Differenzieren wir (I 16) nach w und beachten die letzte Gleichung, so folgt

$$a_t \times \bar{a}_{ww} = \nu (\bar{a}_w \times \bar{a}_{ww}) = 0.$$

Damit haben wir wieder die Bedingung für ein Strahlensystem mit ebenen Zylindern (I 4a) erhalten. Wir wollen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammenfassen in dem

Satz 3: *Besitzen die durch einen beliebigen Strahl $\mathfrak{A}$ gehenden reellen Regelflächen eines Strahlensystems gleichen Drall und gleichen Kehlpunkt, so ist das System isotrop; haben die Regelflächen dagegen gleichen Drall aber verschiedene Kehlpunkte, oder gleichen Kehlpunkt aber verschiedenen Drall, so ist das System zylindrisch mit ebenen Zylindern.*

II. Bestimmung der Strahlenkomplexe mit integralen Linearformen.

Nach dem Vorhergehenden besteht ein Strahlenkomplex, dessen I. PFAFFsche Differentialform vollständig integral ist, aus einer Schar von isotropen Strahlensystemen. Ist die II. oder III. PFAFFsche Form integral, so müssen auf jeden Fall die Zylinder des Komplexes eben sein. Wir werden zunächst alle Komplexe bestimmen, deren I. Form integral ist. Aus dieser Menge sondern wir durch die Forderung, daß die Zylinder eben sind, eine Untermenge aus und zeigen, daß in allen Komplexen der Untermenge die drei PFAFFschen Formen integral sind.

4. Ausgezeichnete Parameter. In jedem regulären Komplex mit drei (unabhängigen) integralen PFAFFschen Formen gibt es sicher drei Parameter u^1, u^2, u^3 derart, daß für $u^i = \text{const}$ jeweils eine der Formen verschwindet. Es seien $u^3 = \text{const}$ die isotropen Strahlensysteme des Komplexes. Dann bestimmen die simultanen Gleichungen $u^1 = \text{const}, u^2 = \text{const}$ die Zylinder des Komplexes, oder in anderen Worten, das sphärische Bild α des Komplexes hängt nur von den beiden Parametern u^1, u^2 ab. Wir können daher statt u^1, u^2 neue Parameter $u = u(u^1, u^2)$ und $v = v(u^1, u^2)$ einführen, daß $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die Minimallinien des sphärischen Bildes des Komplexes sind. Die Bedingung dafür lautet

$$\left\{ \frac{du}{dv} \right\} = [\alpha_1 \alpha_1 du^1 - (\alpha_1 \alpha_2 + \sqrt{(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2) - (\alpha_1 \alpha_1)(\alpha_2 \alpha_2)}) du^2] X(u^1, u^2).$$

Da α nur Funktion der zwei Veränderlichen u^1, u^2 ist, gibt es stets integrierende Faktoren $X(u^1, u^2)$. Schreiben wir noch w statt u^3 , so können wir stets annehmen, daß $u = \text{const}, v = \text{const}$ die Minimallinien des sphärischen Bildes und $w = \text{const}$ isotrope Strahlensysteme sind.

Etwas schwieriger ist der Beweis, daß die gleichen Parameter u, v, w unter gewissen Voraussetzungen in jedem Strahlenkomplex eingeführt werden können, in dem lediglich die I. PFAFFsche Form integrabel ist. Wir nehmen wieder an, $w = \text{const}$ seien die isotropen Strahlensysteme des Komplexes, also $dw = 0$ die I. Differentialform. Wenn der Komplex nicht entartet (Hauptdrall nicht verschwindet), so liegen die Zylinder des Komplexes nicht in den Systemen $w = \text{const}$. Betrachten wir ein Stück Ω des Parameterraumes u^1, u^2, w , wo u^1, u^2 noch nicht näher bestimmt sind, so können wir $w = \text{const}$ als Schar paralleler Ebenen des Parameterraumes deuten. Durch jeden Punkt von Ω geht eine Kurve, die dem Zylinder durch den entsprechenden Strahl des Komplexes zugeordnet ist. Diese Kurven bilden in Ω eine Kongruenz von Transversalen durch die Ebenen $w = \text{const}$. Dann ist es stets möglich, in Ω solche Parameter u^1, u^2 zu wählen, daß die Transversalen durch die simultanen Gleichungen $u^1 = \text{const}, u^2 = \text{const}$ gegeben sind. Dadurch ist aber das sphärische Bild α des Komplexes wieder unabhängig von w und die Einführung isotroper Parameter u, v der Einheitskugel führt nur über integrale Differentialformen. Die Untersuchung beschränkt sich jedoch auf die Umgebung eines Strahles $\mathfrak{A}$, die in einem Gebiet Ω liegt.

5. Strahlenkomplexe mit einer Schar isotroper Strahlensysteme. Nach RIBAUCCOUR läßt sich ein isotropes Strahlensystem durch zwei isotrope Kurven $p(u)$ und $q(v)$ darstellen, indem man die Schmiegungsebenen der beiden Kurven miteinander zum Schnitt bringt. Sind p, q zugleich Funktionen noch einer zweiten (reellen) Veränderlichen w , so ergibt sich eine Schar von isotropen Strahlensystemen,

die den Komplex erzeugen. Daher ist der Strahlenkomplex bestimmt durch die Vektoren

$$(II\ 1) \quad p(u, w), \quad q(v, w)$$

mit den Bedingungen

$$(II\ 2) \quad p_u p_u \equiv 0, \quad q_v q_v \equiv 0.$$

Die Gleichungen der Schmiegungebenen der Kurven p, q sind, wenn x ein beliebiger Punkt der Schmiegungeebene ist,

$$(II\ 3) \quad (x - p(u, w)) \cdot (p_u \times p_{uu}) = 0; \quad (x - q(v, w)) \cdot (q_v \times q_{vv}) = 0.$$

Da p, q Minimalkurven sind, ist nach (II 2)

$$(II\ 2a) \quad \frac{1}{2} p_u p_u = p_u p_{uu} = 0, \quad \frac{1}{2} q_v q_v = q_v q_{vv} = 0$$

und demnach, wenn p_u nicht parallel zu p_{uu} ist:

$$(II\ 4) \quad \lambda (p_u \times p_{uu}) = p_u, \quad \bar{\lambda} (q_v \times q_{vv}) = q_v,$$

dabei sind $\lambda, \bar{\lambda}$ Proportionalitätsfaktoren. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen der Schmiegungebenen zu

$$(II\ 5) \quad (x - p) \cdot p_u = 0, \quad (x - q) \cdot q_v = 0.$$

Ihre Schnittgerade hat für irgend ein Wertsystem der Parameter u, v, w , wie wir zeigen werden, die STUDYSCHEN Linienkoordinaten

$$(II\ 6) \quad a = (p_u \times q_v) e; \quad \bar{a} = [p_u (q_v q_v) - q_v (p_u p_u)] e.$$

Es ist zu beweisen, daß jeder Punkt x , der den beiden Gleichungen (II 5) genügt, auf der Geraden $a, \bar{a}$ liegt. x liegt auf der Geraden, wenn

$$x \times a = \bar{a}.$$

Setzen wir für a den Wert ein, so folgt

$$x \times (p_u \times q_v) e = \bar{a}$$

oder

$$(x q_v) p_u - (x p_u) q_v = \frac{1}{e} \bar{a}.$$

Nach (II 5) ist aber

$$x q_v = q q_v, \quad x p_u = p p_u.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die vorletzte Gleichung ergibt sich (II 6).

Die Gleichungen (II 6) geben eine Parameterdarstellung aller Strahlenkomplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten. e ist ein an sich willkürlicher Normierungsfaktor, den wir so wählen, daß

$$(II\ 7) \quad \frac{1}{e} = + \sqrt{(p_u \times q_v) (p_u \times q_v)} = i (p_u q_v), \quad i = \sqrt{-1}$$

damit a Einheitsvektor ist.

Wir wollen schon hier auf den Zusammenhang mit den *Minimalflächen* hinweisen. Bekanntlich umhüllen in einem isotropen Strahlensystem die Mittenebenen, das sind die zu $\mathfrak{M}$ senkrechten Ebenen durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{M}$, eine Minimalfläche. Zu jedem isotropen Strahlensystem des Komplexes (II 6) gehört eine Minimalfläche m , deren Punkte durch die Vektorgleichung

$$(II\ 8) \quad m = \frac{1}{2} (p(u, w) + q(v, w)), \quad w = \text{const}$$

gegeben sind.

6. Vereinfachte Darstellung der Komplexe (II 6). Wir wollen zeigen, daß ein Strahlenkomplex mit einer Schar isotroper Strahlensysteme durch zwei konjugiert komplexe Funktionen bestimmt ist. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz: Die isotropen Tangentenvektoren der Minimalkurven $p(u, w)$, $q(v, w)$ in (II 1) lassen sich stets in der Form schreiben

$$(II\ 9) \quad p_u(u, w) = \Phi(u, w) \hat{p}_u(u), \quad q_v(v, w) = \Psi(v, w) \hat{q}_v(v),$$

wo $\hat{p}_u$ und $\hat{q}_v$ nicht von w abhängen.

Zum Beweis gehen wir davon aus, daß der Vektor a in (II 6, 7) von w unabhängig ist. Differentiation von a nach w gibt:

$$(p_{uw} \times q_v + p_u \times q_{vw})(p_u q_v) - (p_u \times q_v)(p_{uw} q_v + p_u q_{vw}) = 0.$$

Durch skalare Multiplikation mit p_u , q_v folgt:

$$(p_{uw} q_v p_u) = 0, \quad (q_{vw} q_v p_u) = 0.$$

Daher sind p_{uw} und q_{vw} Linearkombinationen von p_u , q_v . Wir können also schreiben

$$p_{uw} = \alpha q_v + \beta p_u, \quad q_{vw} = \gamma q_v + \delta p_u.$$

Multiplizieren wir die linke Gleichung skalar mit p_u und die rechte mit q_v , so ergibt sich $\alpha = 0$, $\delta = 0$ und es bleibt

$$(II\ 9\ a) \quad p_{uw} = \beta p_u, \quad q_{vw} = \gamma q_v.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes. Sind nämlich p_u^i die Komponenten von p_u , so folgt durch Integration aus (II 9 a)

$$p_u^i = C^i(u) \cdot e^{\int \beta(u, w) dw}.$$

Betrachten wir $C^i(u)$ als Komponenten des Vektors $\hat{p}_u$, so ist

$$p_u = e^{\int \beta(u, w) dw} \cdot \hat{p}_u(u).$$

Jetzt können wir für $\hat{p}_u$ und $\hat{q}_v$ die aus der Theorie der Minimalkurven bekannte Form der Darstellung eines Paares konjugierter isotroper Vektoren wählen

$$(II\ 10) \quad \begin{aligned} \hat{p}_u &= \frac{1}{2} (1 - u^2) i + \frac{i}{2} (1 + u^2) j + u k, \\ \hat{q}_v &= \frac{1}{2} (1 - v^2) i - \frac{i}{2} (1 + v^2) j + v k. \end{aligned}$$

Zur späteren Anwendung erwähnen wir, daß

$$(II\ 11) \quad \hat{p}_u \hat{p}_{uuu} = -1, \quad \hat{q}_v \hat{q}_{vvv} = -1.$$

Dabei bedeuten die Indizes die Ableitungen von $\hat{p}_u, \hat{q}_v$.

In den Gleichungen (II 6) des Strahlenkomplexes treten die Skalarprodukte $q q_v$ und $p p_u$ auf. Sie lassen sich durch (II 9) genauer bestimmen. Wir setzen

$$(II\ 12) \quad \Phi(u, w) = F_{uuu}(u, w).$$

Dann folgt durch partielle Integration aus (II 9), da nach (II 10) $\hat{p}_{uuuu} = 0$ ist,

$$(II\ 13) \quad p(u, w) = \int F_{uuu} \hat{p}_u du = F_{uu} \hat{p}_u - F_u \hat{p}_{uu} + F \hat{p}_{uuu} + \mathfrak{B}(w)$$

mit dem willkürlichen Vektor $\mathfrak{B}(w)$. Skalare Multiplikation der letzten Gleichung mit $\hat{p}_u$ gibt

$$p \hat{p}_u = F \hat{p}_u \hat{p}_{uuu} + \mathfrak{B} \hat{p}_u$$

oder wegen (II 11)

$$(II\ 14) \quad p \hat{p}_u = -F(u, w) + \mathfrak{B} \hat{p}_u, \quad q \hat{q}_v = -\bar{F}(v, w) + \bar{\mathfrak{B}} \hat{q}_v.$$

Mit diesen Ergebnissen gelangen wir zu einer neuen Darstellung der Komplexe (II 6). Nach (II 7) und (II 9) werden

$$(II\ 15) \quad \alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)}$$

und

$$(II\ 16) \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)} \{ \hat{p}_u (q \hat{q}_v) - \hat{q}_v (p \hat{p}_u) \}.$$

$\alpha, \bar{\alpha}$ sind nur reell, wenn p, q konjugiert komplex sind. Nach Einsetzen der Werte (II 14) gilt der

Satz 4: Jeder reelle Strahlenkomplex, der eine Schar isotroper Strahlensysteme enthält, d. h. dessen I. PFAFFSche Differentialform integabel ist, läßt sich in einem Gebiet Ω durch die Gleichungen darstellen

$$(II\ 17) \quad \alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)};$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)} \{ [F(u, w) - \mathfrak{B} \hat{p}_u] \hat{q}_v - [\bar{F}(v, w) - \bar{\mathfrak{B}} \hat{q}_v] \hat{p}_u \},$$

dabei sind $\hat{p}_u, \hat{q}_v$ die isotropen Vektoren (II 10) und $F(u, w), \bar{F}(v, w)$ zwei willkürliche konjugiert komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen u und der konjugiert komplexen Veränderlichen v ; $\mathfrak{B}(w), \bar{\mathfrak{B}}(w)$ sind willkürliche Vektorfunktionen von w .

Da $F(u, w)$ eine willkürliche Funktion ist und $\mathfrak{W} \hat{p}_u$ ebenfalls nur von u, w abhängt, kann man die Ausdrücke in einer neuen willkürlichen Funktion F_1 zusammenfassen und schreiben

$$(II\,17a) \quad F_1(u, w) = F(u, w) + \mathfrak{W} \hat{p}_u; \quad F_2(v, w) = F(v, w) + \overline{\mathfrak{W}} \hat{q}_v.$$

In den Strahlenkomplexen (II 17) wird durch $w = \text{const}$ eine Schar isotroper Strahlensysteme bestimmt. Die Mittenhüllflächen dieser Systeme bilden eine Schar von Minimalflächen. Für den Ortsvektor m der Minimalflächen gilt nach (II 8) und (II 13)

$$(II\,18) \quad m = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \hat{p}_u(u) du + \int \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial v^3} \hat{q}_v(v) dv \right\} + \frac{1}{2} \{ \mathfrak{W} + \overline{\mathfrak{W}} \}.$$

Dabei sind die Integrationskonstanten in dem Vektor $\mathfrak{W}(w) + \overline{\mathfrak{W}}(w)$ enthalten. Alle Komplexe (II 17), für die die Summe $\mathfrak{W}(w) + \overline{\mathfrak{W}}(w)$ den gleichen Wert hat, haben als Mittenhüllflächen dieselbe Schar von Minimalflächen. Daraus folgt der

Satz 5: Ist eine Schar von Minimalflächen gegeben, so werden die Strahlenkomplexe, die diese Schar zu Mittenhüllflächen haben, durch eine willkürliche Vektorfunktion $(\mathfrak{W}(w) - \overline{\mathfrak{W}}(w))$ des Parameters w bestimmt.

Gibt man in (II 17) und (II 18) dem Parameter w irgend einen festen Wert, so zeigen die Gleichungen den Zusammenhang zwischen einer beliebigen Minimalfläche und den zugehörigen isotropen Strahlensystemen. Man erkennt sofort die Richtigkeit von RIBAUCCOURS Ergebnis, daß zu jeder Minimalfläche ∞^3 isotrope Strahlensysteme gehören, die durch den willkürlichen Vektor $\mathfrak{W} - \overline{\mathfrak{W}}$ bestimmt werden. Bedeutungsvoller dürfte der folgende Hinweis sein: In der Literatur wird seit WEIERSTRASS eine isotrope Kurve durch das Integral

$$p = \int U(u) \hat{p}_u(u) du$$

dargestellt und gezeigt, daß man zu einer integralfreien Darstellung der isotropen Kurven bzw. der Minimalflächen kommt, indem man $U(u)$ als dritte Ableitung einer Funktion F deutet, also setzt

$$(II\,18a) \quad U(u) = F'''(u),$$

wie es auch hier in (II 12), (II 13) geschah. War dieser Vorgang bisher ein rein analytischer Kunstgriff, so zeigt der Vergleich von (II 17) mit (II 18) jetzt den geometrischen Sinn:

Die Funktion F bestimmt die isotropen Strahlensysteme, die zur Minimalfläche mit der Funktion F''' gehören.

7. Strahlenkomplexe mit drei integrablen PFAFFSchen Formen. Nach Satz 2 und 3 sind in einem Komplex mit drei integrablen Linearformen die Zylinder eben. Zur Bestimmung der Komplexe gehen wir aus von den Gleichungen (II 15) und (II 16) und

unterwerfen sie der Bedingung (I 4). Da α , $\hat{p}_u$, $\hat{q}_v$ unabhängig von w sind, wird

$$(\alpha \bar{a}_w \bar{a}_{ww}) = (\alpha, \hat{p}_u (q_w \hat{q}_v) - \hat{q}_v (p_w \hat{p}_u), \hat{p}_u (q_{ww} \hat{q}_v) - \hat{q}_v (p_{ww} \hat{p}_u)) = 0$$

oder nach einfacher Umrechnung

$$(\alpha \hat{p}_u \hat{q}_v) \{ (p_w \hat{p}_u) (q_w \hat{q}_v) - (q_w \hat{q}_v) (p_w \hat{p}_u) \} = 0.$$

Das linke Spatprodukt ist sicher von Null verschieden, daher muß die rechte Klammer verschwinden, die wir in der Form schreiben wollen

$$(II\ 19) \quad \frac{p_{ww} \hat{p}_u}{p_w \hat{p}_u} = \frac{q_{ww} \hat{q}_v}{q_w \hat{q}_v}.$$

Hier ist die linke Seite eine Funktion von u, w und die rechte eine Funktion von v, w ; sie können nur einander gleich sein, wenn jede Seite gleich derselben Funktion $W(w)$ von w allein ist. D. h.

$$(II\ 19\ a) \quad \frac{p_{ww} \hat{p}_u}{p_w \hat{p}_u} = W(w), \quad \frac{q_{ww} \hat{q}_v}{q_w \hat{q}_v} = W(w).$$

Durch Integration über w folgt sofort

$$\ln (p_w \hat{p}_u) = \int W(w) dw + U_0(u), \quad \ln (q_w \hat{q}_v) = \int W(w) dw + V_0(v)$$

oder

$$(II\ 19\ b) \quad p_w \hat{p}_u = e^{\int W dw} \cdot e^{U_0}; \quad q_w \hat{q}_v = e^{\int W dw} \cdot e^{V_0}.$$

Setzen wir

$$(II\ 19\ c) \quad e^{\int W dw} = \Omega(w); \quad e^{U_0} = U_1; \quad e^{V_0} = V_1,$$

so wird

$$p_w \hat{p}_u = U_1(u) \Omega(w), \quad q_w \hat{q}_v = V_1(v) \Omega(w)$$

und nach nochmaliger Integration über w

$$(II\ 20) \quad p \hat{p}_u = U_1 \int \Omega dw + U_2, \quad q \hat{q}_v = V_1 \int \Omega dw + V_2.$$

Da Ω nur von der Veränderlichen w abhängt, ist es stets möglich, eine neue Veränderliche $\hat{w}$ einzuführen, so daß

$$(II\ 20\ a) \quad \hat{w} = \int \Omega dw.$$

Wir wollen annehmen, daß von vornherein diese Veränderliche gewählt sei und wieder w statt $\hat{w}$ schreiben. Mit diesem ausgezeichneten Parameter ist

$$(II\ 21) \quad \Omega(w) = 1, \quad \int W dw = 0, \quad W(w) = 0.$$

Durch die Formeln (II 20) sind die Komplexe bestimmt. Wir stellen das Ergebnis in einem Satz zusammen und bringen anschließend die fehlenden Teile des Beweises.

Satz 6: Ein nicht-entarteter Strahlenkomplex, dessen drei PFAFFsche Differentialformen vollständig integrabel sind, läßt sich mittels der isotropen Vektoren $\hat{p}_u, \hat{q}_v$ (II 10) durch die Gleichungen darstellen

$$(II\ 22) \quad \alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i(\hat{p}_u \hat{q}_v)}, \quad \bar{\alpha} = -\frac{1}{i(\hat{p}_u \hat{q}_v)} \{-(U_1 w + U_2) \hat{q}_v + (V_1 w + V_2) \hat{p}_u\}.$$

Dabei sind U_1, U_2 und V_1, V_2 willkürliche Funktionen der konjugiert komplexen Veränderlichen u , bzw. v .

Zusatz 1: Die Strahlen der Komplexe sind reell, wenn U_1, V_1 und U_2, V_2 zwei Paare konjugiert komplexer Funktionen sind.

Da mit einer komplexen Funktion U zugleich die konjugiert komplexe Funktion bestimmt ist, gilt der

Zusatz 2: Ein reeller Strahlenkomplex mit drei integralen Differentialformen ist durch zwei willkürliche Funktionen U_1, U_2 einer komplexen Veränderlichen bestimmt.

8. Integrabilität der II. und III. Linearform. Der Beweis des Satzes 6 ist noch nicht vollständig. Zwar ist in den Komplexen (II 22) die I. Differentialform integrabel und ergibt mit $dw = 0$ eine Schar isotroper Strahlensysteme, dagegen ist bis jetzt nur bewiesen, daß die Zylinder des Komplexes eben sind. Wenn wir das Ergebnis der allgemeinen Theorie (s. Einleitung) nicht voraussetzen wollen, so müssen wir noch zeigen, daß die II. und III. Differentialform integrabel sind. Das geschieht am einfachsten durch Berechnung der Formen.

In (II 22) seien u, v Funktionen eines Parameters t . Dann bestimmt das Vektorpaar $\alpha(t, w), \bar{\alpha}(t, w)$ ein Strahlensystem. Die Regelflächen des Systems haben gemeinsamen Drall, wenn nach (I 9)

$$\alpha_t \bar{\alpha}_w = 0.$$

Schreiben wir die Gleichungen (II 22) abgekürzt

$$(II\ 23) \quad \alpha = \varrho(\hat{p}_u \times \hat{q}_v), \quad \bar{\alpha} = \varrho\{(V_1 w + V_2) \hat{p}_u - (U_1 w + U_2) \hat{q}_v\},$$

so sind die Ableitungen

$$(II\ 24) \quad \begin{aligned} \alpha_t &= \varrho_t(\hat{p}_u \times \hat{q}_v) + \varrho[(\hat{p}_{uu} \times \hat{q}_v) \dot{u} + (\hat{p}_u \times \hat{q}_{vv}) \dot{v}], \\ \bar{\alpha}_w &= \varrho(V_1 \hat{p}_u - U_1 \hat{q}_v). \end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt ergibt sich

$$(II\ 25) \quad V_1(\hat{p}_{uu} \hat{p}_u \hat{q}_v) \dot{u} - U_1(\hat{q}_{vv} \hat{p}_u \hat{q}_v) \dot{v} = 0.$$

Da in der Gleichung nur die beiden Veränderlichen u, v auftreten, ist sie vollständig integrabel. Damit ist die Integrabilität der II. Differentialform bewiesen. (II 25) läßt sich vereinfachen, wenn man $\hat{p}_u, \hat{q}_v$ in der Form (II 10) annimmt; dann ist

$$(II\ 26) \quad \begin{aligned} \hat{p}_{uu} &= -u \mathbf{i} + i u \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \hat{q}_{vv} &= -v \mathbf{i} - i v \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Nach (II 23) läßt sich (II 25) schreiben

$$V_1 (\alpha \dot{p}_{uu}) \dot{u} - U_1 (\alpha \dot{q}_{vv}) \dot{v} = 0.$$

Wegen (II 22), (II 26) ist aber

$$(II\ 27) \quad \alpha \dot{p}_{uu} = -1, \quad \alpha \dot{q}_{vv} = -1.$$

Daher gilt der

Satz 7: Die II. Differentialform des Strahlenkomplexes (II 22) lautet

$$(II\ 28) \quad V_1 du - U_1 dv = 0.$$

Sie ist vollständig integrabel und bestimmt die Strahlensysteme des Komplexes, deren Regelflächen gemeinsamen Drall haben.

Wenden wir uns schließlich zur III. Differentialform, die für die Regelflächen mit gemeinsamen Kehlpunkten verschwindet. Es seien wieder $\alpha(t, w)$, $\bar{\alpha}(t, w)$ Strahlensysteme des Komplexes (II 22). Nach (I 15) haben die Regelflächen des Systems gemeinsamen Kehlpunkt, wenn die Gleichung gilt:

$$(II\ 29) \quad (\alpha \alpha_t \bar{\alpha}_w) = 0$$

$$\text{oder} \quad (\alpha \times \bar{\alpha}_w) \cdot \alpha_t = 0.$$

Aus (II 23, 24) folgt sofort wegen $\dot{p}_u \cdot \dot{p}_u = \dot{q}_v \cdot \dot{q}_v = 0$

$$(\alpha \times \bar{\alpha}_w) = -\varrho^2 (\dot{p}_u \dot{q}_v) (V_1 \dot{p}_u + U_1 \dot{q}_v).$$

Dann ergibt sich aus (II 24) und (II 29)

$$V_1 (\dot{p}_{uu} \dot{p}_u \dot{q}_v) \dot{u} + U_1 (\dot{q}_{vv} \dot{p}_u \dot{q}_v) \dot{v} = 0.$$

Beachten wir (II 27), so gilt

Satz 8: Die III. Differentialform des Strahlenkomplexes (II 22) ist

$$(II\ 30) \quad V_1 du + U_1 dv = 0.$$

Sie ist vollständig integrabel und bestimmt die Strahlensysteme des Komplexes, deren Regelflächen gemeinsamen Kehlpunkt haben.

Die durch (II 28, 30) bestimmten Strahlensysteme sind reell, wenn U_1, V_1 konjugiert komplexe Funktionen sind. Die einfache Form der Gleichungen (II 28, 30) läßt unmittelbar eine geometrische Eigenschaft der Komplexe erkennen. Das sphärische Bild eines zylindrischen Strahlensystems ist eine Kurve. Die beiden Scharen von zylindrischen Strahlensystemen (II 28, 30) erzeugen daher auf der Einheitskugel zwei Kurvenscharen, für die der Satz gilt:

Satz 9: In einem Komplex mit drei integrierbaren Differentialformen erzeugen die sphärischen Bilder der zylindrischen Strahlensysteme, die durch das Verschwinden der II. und III. Differentialform bestimmt werden, ein isometrisches Kurvennetz der Einheitskugel.

Obwohl der Satz unmittelbar einleuchtend ist, wollen wir den Beweis kurz andeuten. Wir führen neue Parameter ein durch

$$d\bar{u} = \frac{dv}{V_1} + \frac{du}{U_1}, \quad i d\bar{v} = \frac{dv}{V_1} - \frac{du}{U_1}.$$

Lösen wir die Gleichungen nach du, dv auf und berechnen $du dv$, so folgt

$$du dv = \frac{1}{4} U_1 V_1 (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Da nach Abs. 4 u, v isotrope Parameter sind, bilden $\bar{u}, \bar{v}$ ein isometrisches Parametersystem.

III. Zusammenhang mit Minimalkurven und -flächen.

Die isotropen Kurven und Minimalflächen, die zu den Strahlenkomplexen mit drei integrierbaren Linearformen gehören, sind in einfacher Weise angeordnet. Wir wollen in den folgenden Abschnitten die Beziehungen genauer betrachten.

9. Minimal-Kurven und Flächen. In den Gleichungen (II 17, 18) bestimmen wir die Funktionen $F, \bar{F}, \mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{B}}$ so, daß (II 22) erfüllt ist. Dazu setzen wir

$$(III\ 1) \quad \begin{aligned} F(u, w) - \mathfrak{B} \hat{p}_u &= U_3 w + U_4 + (g_3 w + g_4) \cdot \hat{p}_u, \\ \bar{F}(v, w) - \bar{\mathfrak{B}} \hat{q}_v &= V_3 w + V_4 + (\bar{g}_3 w + \bar{g}_4) \cdot \hat{q}_v. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß die Gleichungen (II 17) die Form von (II 22) annehmen, wenn $g_3, g_4, \bar{g}_3, \bar{g}_4$ feste Vektoren sind. Jetzt können wir nach (II 13) und (II 18) die Minimalkurven und -flächen anschreiben, die zu dem Komplex gehören. Mit p_j, q_j bezeichnen wir die konjugiert komplexen isotropen Kurven

$$(III\ 2) \quad p_j = \int U_j''' \hat{p}_u du + g_j, \quad q_j = \int V_j''' \hat{q}_v dv + \bar{g}_j, \quad [j = 3, 4].$$

Ferner nennen wir die Kurvenschar

$$(III\ 3) \quad p(u, w) = p_3 w + p_4$$

ein *Büschel isotroper Kurven*; ebenso wollen wir die Flächenschar

$$(III\ 4) \quad m(u, v, w) = \frac{1}{2} (p_3 + q_3) w + \frac{1}{2} (p_4 + q_4)$$

ein *Büschel von Minimalflächen* nennen. Dann gilt

Satz 10: *Bringt man die Schmiegungebenen des Büschels isotroper Kurven*

$$(III\ 5) \quad p(u, w) = p_3(u) w + p_4(u),$$

in dem $p_3(u), p_4(u)$ zwei beliebige isotrope Kurven sind, zum Schnitt mit den Schmiegungebenen der entsprechenden Kurven des konjugiert komplexen Büschels

$$(III\ 6) \quad q(v, w) = q_3(v) w + q_4(v),$$

so erzeugen die Schnittgeraden einen Strahlenkomplex mit drei integrierbaren PFAFFschen Differentialformen.

Die Mittenhüllflächen der in dem Komplex enthaltenen isotropen Strahlensysteme bilden das Büschel (III 4) von Minimalflächen. Aus (III 2) erkennt man, daß durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems stets

$$\text{III 7)} \quad \bar{g}_4 + g_4 = 0$$

gemacht werden kann. Dann läßt sich daß Büschel von Minimalflächen in der Form darstellen

$$\text{III 8)} \quad m(u, v, w) = \frac{1}{2} \left[\int U_3''' \hat{p}_u du + \int V_3''' \hat{q}_v dv + g_3 + \bar{g}_3 \right] w + \frac{1}{2} \left[\int U_4''' \hat{p}_u du + \int V_4''' \hat{q}_v dv \right].$$

Aus dem Vergleich mit den Gleichungen (II 17, 18), (III 1, 7) folgt

Satz 11: Ist ein Büschel von Minimalflächen gegeben (III 8), so gibt es höchstens ∞^6 Strahlenkomplexe, die die Minimalflächen des Büschels als Mittenhüllflächen ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen.

Erwähnenswert ist der Sonderfall, in dem

$$\text{III 9)} \quad U_3 = V_3 = 0, \quad g_3 + \bar{g}_3 = 0$$

sind; dann ist (III 8) unabhängig von w . Die isotropen Strahlenkomplexe haben sämtlich dieselbe Minimalfläche als Mittenhüllfläche. Da man w durch $\bar{w} = \alpha w + \beta$ ersetzen kann, ohne den Komplex zu ändern, folgt aus Satz 11 sofort

Satz 12: Ist eine beliebige Minimalfläche

$$\text{III 10)} \quad m(u, v) = \frac{1}{2} \left[\int U_4''' \hat{p}_u du + \int V_4''' \hat{q}_v dv \right]$$

gegeben, so gibt es höchstens ∞^4 Strahlenkomplexe, die m als gemeinsame Mittenhüllfläche ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen. Die Komplexe lassen sich mit zwei willkürlichen festen Vektoren $g_3, \bar{g}_3$ durch die Gleichungen darstellen

$$\text{III 10 a)} \quad \alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{i(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v)} \{ [U_4 + (g_3 w + g_4) \cdot \hat{p}_u] \hat{q}_v - [V_4 + (g_3 w + g_4) \cdot \hat{q}_v] \hat{p}_u \}.$$

Dabei kann g_3 ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Einheitsvektor gewählt werden.

10. Die Hüllfläche des Komplexes. Da die Zylinder der Komplexe eben sind, läßt sich jeder Strahlenkomplex (II 22) aus einer zweiparametrischen Ebenenschar derart erzeugen, daß in jeder Ebene ein Büschel paralleler Geraden liegt, die dem Komplex angehören. Die Ebenen umhüllen im allgemeinen eine Fläche, die wir die *Hüllfläche des Komplexes* nennen wollen. Aus (II 22) läßt sich leicht die Gleichung einer Zylinderebene berechnen. Bekanntlich genügt der

Ortsvektor $\mathfrak{x}$ eines Punktes der Geraden $(\alpha, \bar{\alpha})$ der Gleichung

$$(III\ 11) \quad \mathfrak{x} = \alpha \times \bar{\alpha} + \lambda \alpha,$$

wo λ ein Parameter für die Punkte der Geraden ist. Nach (II 22) wird

$$(III\ 12) \quad \alpha \times \bar{\alpha} = \varrho^2 \{ -(U_1 w + U_2) (\hat{p}_u \times \hat{q}_v) \times \hat{q}_v \\ + (V_1 w + V_2) (\hat{p}_u \times \hat{q}_v) \times \hat{p}_u \}.$$

Die vektorischen Produkte lassen sich umformen

$$(III\ 13) \quad (\hat{p}_u \times \hat{q}_v) \times \hat{q}_v = (\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v) \hat{q}_v = -\frac{i}{\varrho} \hat{q}_v, \\ (\hat{p}_u \times \hat{q}_v) \times \hat{p}_u = -(\hat{p}_u \cdot \hat{q}_v) \hat{p}_u = +\frac{i}{\varrho} \hat{p}_u.$$

Durch Einsetzen folgt

$$\alpha \times \bar{\alpha} = i\varrho \{ (U_1 w + U_2) \hat{q}_v + (V_1 w + V_2) \hat{p}_u \}.$$

Für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ eines Punktes der Zylinderebene erhalten wir schließlich

$$(III\ 14) \quad \mathfrak{x} = \varrho \{ +i(U_1 w + U_2) \hat{q}_v + i(V_1 w + V_2) \hat{p}_u + \lambda (\hat{p}_u \times \hat{q}_v) \}.$$

Ein Punkt in der Ebene wird durch die laufenden Parameter w, λ festgelegt. Zu jedem Wert der Parameter u, v , gehört eine Ebene. Durch Elimination von u, v ergibt sich die Hüllfläche des Komplexes. Die Normale der Ebene (III 14) ist bestimmt durch den Vektor

$$(III\ 15) \quad \mathfrak{n}(u, v) = U_1 \hat{q}_v - V_1 \hat{p}_u.$$

Aus dieser Formel folgt sofort eine Beziehung zu dem isometrischen Kurvennetz, das nach (II 28, 30) durch die Nulllinien der II. und III. Differentialform auf der Einheitskugel bestimmt wird. Durch Ableitung von (II 22) erhält man

$$(III\ 15a) \quad \alpha_u = +i\varrho \hat{q}_v, \quad \alpha_v = +i\varrho \hat{p}_u.$$

Aus (II 28, 30) und (III 15) folgt sofort der

Satz 13: Durch das Verschwinden der III. Differentialform (II 30) wird auf der Einheitskugel eine Schar von Kurven bestimmt, deren Tangenten parallel zur Normalen der Zylinderebenen des Komplexes sind. Die Tangenten der Nulllinien der II. Form sind parallel zu den Zylinderebenen und senkrecht zu α .

11. Zusammenfallende Minimalflächen. Der Sonderfall, in dem die Schar der isotropen Strahlensysteme ein und dieselbe Minimalfläche als Mittenhüllfläche besitzt, läßt sich leichter übersehen. Nach Satz 9 bilden die Nulllinien der II. und III. Differentialform ein isometrisches Kurvennetz auf der Einheitskugel. Im Sonderfall (III 9) ist dieses Netz ein System von Meridianen und Parallelkreisen.

Aus (III 9), (III 1) und (II 17), (II 22) folgt

$$(III\ 16) \quad U_1 = -\hat{p}_u g_3, \quad V_1 = +\hat{q}_v g_3.$$

Dann wird die Linearform (II 28)

$$(III\ 17) \quad (\hat{q}_v g_s) du + (\hat{p}_u g_s) dv = 0$$

und die Linearform (II 30)

$$(III\ 18) \quad (\hat{q}_v g_s) du - (\hat{p}_u g_s) dv = 0.$$

Bezeichnen wir die Ableitung von α in Richtung (III 17), d. h. in Richtung der II. Differentialform, mit $\dot{\alpha}$, so folgt aus (III 15 a)

$$(III\ 19) \quad \dot{\alpha} = i \rho [(\hat{p}_u g_s) \hat{q}_v - (\hat{q}_v g_s) \hat{p}_u].$$

Skalare Multiplikation mit $\hat{g}_s$ führt zu

$$\dot{\alpha} g_s = 0.$$

Da α Einheitsvektor ist, müssen die Nulllinien der II. Form Kreise der Einheitskugel sein, deren Ebenen senkrecht zu $\hat{g}_s$ sind. Daher gilt der

Satz 14: *Wenn die Mittenhüllflächen der Schar isotroper Strahlensysteme des Komplexes $\mathfrak{A}$ in ein und dieselbe Minimalfläche zusammenfallen, dann bestimmt die II. Differentialform auf der Einheitskugel des sphärischen Bildes eine Schar von Parallelkreisen und die III. Form die zugehörige Schar von Meridianen.*

Um einen Einblick in den Aufbau eines Komplexes dieser Klasse zu gewinnen, gehen wir von dem Punkt m einer Minimalfläche aus. Zu m gehören ∞^1 Geraden des Komplexes, die parallel zur Normalen der Minimalfläche in m sind und in einer Ebene liegen. Diese schneidet die Tangentenebene in m in einer Geraden der Richtung $\dot{\alpha}$ (III 19). Ziehen wir die Parallele $\mathfrak{P}$ zu $\dot{\alpha}$ durch m und lassen m die Punkte der Minimalfläche durchlaufen, so sind die von $\mathfrak{P}$ umhüllten Kurven der Minimalfläche (d. h. die Rückkehrkanten einer Torsenschar des von $\mathfrak{P}$ erzeugten Strahlensystems) ebene Kurven. Um das zu zeigen, differenzieren wir (III 10)

$$m_u = \frac{1}{2} U_4''' \hat{p}_u, \quad m_v = \frac{1}{2} V_4''' \hat{q}_v.$$

Es gibt eine Fortschrittsrichtung $\dot{u} : \dot{v}$ derart, daß $\dot{m} = m_u \dot{u} + m_v \dot{v}$ parallel zu $\dot{\alpha}$ wird. Dann ist

$$2 \dot{m} = U_4''' \hat{p}_u \dot{u} + V_4''' \hat{q}_v \dot{v} = (\hat{p}_u g_s) \hat{q}_v - (\hat{q}_v g_s) \hat{p}_u.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$(III\ 20) \quad \dot{u} = - \frac{1}{U_4'''} (\hat{q}_v g_s), \quad \dot{v} = + \frac{1}{V_4'''} (\hat{p}_u g_s).$$

Damit wird

$$2 \dot{m} = (\hat{p}_u g_s) \hat{q}_v - (\hat{q}_v g_s) \hat{p}_u$$

und

$$\dot{m} g_s = 0.$$

D. h. die Kurven sind eben und senkrecht zu $\hat{g}_s$. Also gilt

Satz 15. *Fallen in einem Strahlenkomplex mit 3 integralen Differentialformen die Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme in ein und dieselbe Minimalfläche m zusammen, so gehören zu jedem Punkt von $m \infty^1$ Komplexgeraden, die ein zylindrisches Strahlenbüschel bilden. Zieht man in jedem Punkt von m die zur Ebene des Büschels parallele Tangente $\mathfrak{P}$, so umhüllen die Geraden $\mathfrak{P}$ auf m eine Schar ebener Kurven, deren Ebenen einander parallel und zu dem willkürlichen Einheitsvektor $\mathfrak{g}_3$ senkrecht sind.*

Zum Schluß sei ein besonders einfacher Komplex der betrachteten Klasse angegeben: Es sei K eine Kettenlinie, die durch Rotation um die z -Achse das Katenoid K_r erzeugt. E sei eine beliebige Evolvente von K . Bei der Rotation beschreibt E die Drehfläche E_r . Längs eines Meridians von E_r bilden die Tangenten der Parallelkreise einen Zylinder. Die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten des Zylinders sind die Strahlen eines Komplexes mit drei integralen PFAFFschen Differentialformen, dessen isotrope Strahlensysteme sämtlich das Katenoid K_r als gemeinsame Mittenhüllfläche besitzen.

(Eingegangen am 1. Oktober 1948.)

Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlen.

Von

Hans-Egon Richert in Hamburg.

Herr R. SPRAGUE¹⁾ bewies mit einem sehr einfachen Verfahren die Möglichkeit der Zerfällung aller natürlichen Zahlen > 128 in ungleiche Quadratzahlen.

Nimmt man zu seiner Beweisidee den Satz von TSCHEBISCHEFF, daß zwischen den Grenzen $n > 3$ und $2n - 2$ stets mindestens eine Primzahl liegt, hinzu, so ergibt sich der folgende Zerfällungssatz:

Jede natürliche Zahl $n > 6$ ist als Summe ungleicher Primzahlen darstellbar.

Beweis. Aus den k ersten Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ sei bereits eine Serie von s_i aufeinanderfolgenden Zahlen als Summe von lauter ungleichen der $p_1, p_2, \dots, p_k$ derart hergestellt, daß

$$s_0 \geq p_{k+1}$$

ist. Durch Addition von p_{k+1} zu den p_{k+1} letzten Zahlen der s_0 -Serie wird diese auf eine s_1 -Serie mit

$$s_1 = s_0 + p_{k+1}$$

verlängert, wo wieder alle s_i aufeinanderfolgenden Zahlen als Summe ungleicher Primzahlen dargestellt sind.

So kann man unbeschränkt fortfahren, denn aus

$$s_{r-1} \geq p_{k+r}$$

und

$$s_r = s_{r-1} + p_{k+r}$$

folgt stets wieder

$$s_r \geq 2p_{k+r}$$

und da nach dem Satze von TSCHEBISCHEFF für $p_l > 3$

$$2p_l - 2 > p_{l+1} > p_l$$

ist, auch

$$s_r \geq p_{k+r+1}.$$

¹⁾ R. SPRAGUE, Über Zerlegungen in ungleiche Quadratzahlen, Math. Zeitschr. 51, 289—290 (1948). Vgl. hierzu die Note desselben Verfassers, Über Zerlegungen in n -te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen, ebenda, 466—468 (1948).

Da gemäß der nachfolgenden Tabelle aus den Primzahlen

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$$

als Induktionsanfang eine s_0 -Serie der gewünschten Art mit

$$s_0 \geq p_5 = 11 \quad (> 3)$$

hergestellt ist, ist somit der Satz vollständig bewiesen.

$7 = 7$	$12 = 7 + 5$	$16 = 11 + 5$
$8 = 5 + 3$	$13 = 11 + 2$	$17 = 7 + 5 + 3 + 2$
$9 = 7 + 2$	$14 = 11 + 3$	$18 = 11 + 7$
$10 = 7 + 3$	$15 = 7 + 5 + 3$	$19 = 11 + 5 + 3$
$11 = 11$		

(Eingegangen am 18. Oktober 1948.)

Die E_p - und S_α -Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

1. Das BORELSche Summierungsverfahren oder B -Verfahren läßt sich einerseits als der Grenzfall $p \rightarrow \infty$ des EULER-KNOPPSchen oder E_p -Verfahrens ($p > 0$) auffassen, andererseits als der Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ eines vom Verf. als S_α -Verfahren bezeichneten Verfahrens ($0 < \alpha < 1$). In der vorliegenden Note soll eine Deutung des E_p - und S_α -Verfahrens gegeben werden, welche diese Tatsache und die enge Verwandtschaft aller drei Verfahren besonders augenfällig macht. Eine Modifikation des durch die genannte Deutung nahegelegten Grenzübergangs vom E_p - bzw. S_α -Verfahren zum B -Verfahren führt auf eine Untersuchung von J. KARAMATA [3]¹⁾, in der das Verhalten der B -Mittel einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze mit dem Verhalten der durch die Reihe dargestellten Funktion in Zusammenhang gebracht wird. Den KARAMATASchen B -Sätzen werden hier entsprechende E_p - und S_α -Sätze zur Seite gestellt, die für $p \rightarrow \infty$ bzw. $\alpha \rightarrow 0$ in die B -Sätze übergehen²⁾.

Zunächst seien einige Bezeichnungen und bekannte Tatsachen zusammengestellt³⁾. Die Reihe

$$(1.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

um deren Summierung es sich handeln soll, besitze beliebige komplexe Glieder und die Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu$. Ihr werde das Funktionselement

$$(1.2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

der komplexen Veränderlichen z zugeordnet. Die Reihe (1.1) heißt E_p -summierbar (oder die Folge s_n ihrer Teilsummen E_p -limitierbar)

¹⁾ Vgl. das Schrifttum am Schluß der Note.

²⁾ Ein Teil dieser Ergebnisse findet sich ohne Beweis in [6].

³⁾ Zum E_p -Verfahren vgl. [4]; zum B -Verfahren vgl. [1], S. 455 und 481; zum S_α -Verfahren vgl. [5].

zum Wert s für ein $p > 0$, wenn die für ganzes $n \geq 0$ erklärten E_p -Mittel

$$\begin{aligned} E_p(n; s_p) &= \frac{1}{2^{pn}} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} s_p \\ &= a_0 + \frac{1}{2^p} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{p\mu}} \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} (2^p - 1)^{\mu-v} a_{v+1} = a_0 + \frac{1}{2^p} \sum_{\mu=0}^{n-1} E_p(\mu; a_{v+1}) \end{aligned}$$

von s_n gegen s streben für $n \rightarrow \infty$. Die Reihe (1.1) heißt B -summierbar zum Wert s , wenn die B -Mittel

$$\begin{aligned} B(x; s_p) &= e^{-x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} s_p \\ &= a_0 + \int_{t=0}^x e^{-t} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} a_{v+1} \right) dt = a_0 + \int_{t=0}^x B(t; a_{v+1}) dt \end{aligned}$$

vorhanden sind für $x > 0$ und gegen s streben für $x \rightarrow \infty$; dabei hat die Existenz der $B(x; s_p)$ diejenige der $B(x; a_{v+1})$ zur Folge und umgekehrt. Die Reihe (1.1) heißt S_α -summierbar zum Wert s für ein α mit $0 < \alpha < 1$, wenn die S_α -Mittel

$$\begin{aligned} S_\alpha(n; s_p) &= (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_p \\ &= a_0 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sum_{\mu=0}^n (1 - \alpha)^{\mu+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{\mu+v}{v} \alpha^v a_{v+1} = a_0 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sum_{\mu=0}^n S_\alpha(\mu; a_{v+1}) \end{aligned}$$

vorhanden sind für ganzes $n \geq 0$ und gegen s streben für $n \rightarrow \infty$; dabei hat die Existenz der $S_\alpha(n; s_p)$ diejenige der $S_\alpha(n; a_{v+1})$ zur Folge und umgekehrt. — Ist $a \neq 1$, so verstehen wir unter $\mathfrak{K}(a)$ das abgeschlossene Kreisgebiet

$$\mathfrak{K}(a): |z - a| \leq |1 - a|.$$

2. Wir wollen nun einen möglichst natürlichen Weg aufzeigen, der vom E_p -Verfahren für $p \rightarrow \infty$ zum B -Verfahren führt. Die bei der üblichen funktionentheoretischen Deutung des E_p -Verfahrens benutzte Abbildung

$$w = \frac{2^p z}{(2^p - 1)z + 1}, \quad z = \frac{w}{2^p - (2^p - 1)w}$$

der z -Ebene auf eine w -Ebene verliert für $p \rightarrow \infty$ ihren Sinn und ist daher für unseren Zweck nicht dienlich. Dagegen wird die im folgenden Satz enthaltene Deutung des E_p -Verfahrens brauchbar sein.

Satz E. Es sei $p > 0$ und es besitze das Funktionselement (1.2) einen positiven Konvergenzradius⁴⁾. Dann stimmt die Folge der Teil-

⁴⁾ Da aus $E_p - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ stets $a_n = o((2^{p+1} - 1)^n)$ für $n \rightarrow \infty$ folgt, schränkt diese Voraussetzung die Anwendbarkeit des Satzes auf E_p -summierbare Reihen nicht ein.

summen der in der Umgebung von $z = \infty$ gewiß vorhandenen Entwicklung der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ nach Potenzen von $\frac{1}{z + (2^p - 1)}$ für $z = 1$ überein mit der Folge $E_p(n; s_p)$, so daß also dann und nur dann $E_p - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z = 1$ zum Wert s konvergiert.

Beweis. Wir setzen $2^p - 1 = q > 0$. Für genügend großes $|z|$ ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{z}\right) &= a_0 + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{v+1}}{(z+q)^{v+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{z+q}\right)^{v+1}} \\ &= a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{v+1}}{(z+q)^v} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{v+\lambda}{v} \frac{q^\lambda}{(z+q)^\lambda}. \end{aligned}$$

Indem wir nach Potenzen von $\frac{1}{z+q}$ ordnen, was nach dem WEIERSTRASSschen Doppelreihensatz erlaubt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{z}\right) &= a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{a}_{v+1} \sum_{\mu=v}^{\infty} \binom{\mu}{v} \frac{q^{\mu-v}}{(z+q)^\mu} \\ &= a_0 + \frac{1}{z+q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(z+q)^\mu} \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} q^{\mu-v} a_{v+1}, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Unsere Absicht ist es nun, uns durch Satz *E* zu einem Verfahren führen zu lassen, welches als der Grenzfall $p \rightarrow \infty$ des E_p -Verfahrens aufgefaßt werden kann. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber für den Augenblick an, daß (1.2) den Konvergenzradius 1 besitzt. Dann ist die Funktion $f(1/z)$ im Äußeren des Einheitskreises regulär, so daß es sich bei der in Satz *E* auftretenden, an der Stelle $z = 1$ zu nehmenden Entwicklung um die Potenzreihenentwicklung von $f(1/z)$ im Äußeren von $\Re(-2^p - 1)$ handelt. Für $p \rightarrow \infty$ geht das Entwicklungsgebiet in die Halbebene $\Re z > 1$ über. Es liegt nahe, an die Stelle der dort nicht mehr möglichen Potenzreihenentwicklung die Darstellung von $f(1/z)$ als LAPLACE-Integral zu setzen. Die Funktion $f(1/z) - a_0$ ist bei $z = \infty$ regulär und verschwindend, ferner für $\Re z > 1$ regulär, also (vgl. z. B. [2], S. 65, Satz 3) ist für $\Re z > 1$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) - a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt \quad \text{mit} \quad F(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} a_{v+1}.$$

Im Anschluß an Satz *E* betrachten wir daher dasjenige Verfahren, bei dem die Reihe (1.1) zum Wert s summierbar heißt, wenn die bei $z = 1$ genommene rechte Seite der LAPLACESchen Darstellung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \int_0^{\infty} e^{-zt} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} a_{v+1} \right) dt$$

existiert und den Wert s hat. Das so nahegelegte Summierungsverfahren ist aber gerade das B -Verfahren, wenn wir die unnötig starke Voraussetzung, daß (1. 2) den Konvergenzradius 1 besitzt, nachträglich wieder fallen lassen und nur verlangen, was unbedingt erforderlich ist, nämlich daß die Reihe für $F(t)$ konvergiert für $t > 0$. Damit ist das B -Verfahren in natürlicher Weise aus dem E_p -Verfahren heraus entwickelt. — Dem Satz E entspricht beim S_α -Verfahren der folgende

Satz S . *Es sei $0 < \alpha < 1$ und es seien die S_α -Mittel der Folge s_n vorhanden, so daß das Funktionselement (1. 2) mindestens den Konvergenzradius α besitzt; ferner sei, falls α der genaue Konvergenzradius von (1. 2) ist, $f(z)$ für $z = \alpha$ regulär. Dann stimmt die Folge der Teilsummen der in der Umgebung von $z = 1/\alpha$ gewiß vorhandenen Entwicklung der Funktion $f(1/z)$ nach Potenzen von $z - 1/\alpha$ für $z = 1$ überein mit der Folge $S_\alpha(n; s_r)$, so daß also dann und nur dann $S_\alpha - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z = 1$ zum Wert s konvergiert.*

Beweis. Daß (1. 2) mindestens den Konvergenzradius α hat, folgt aus der Konvergenz der Reihen für $S_\alpha(n; s_r)$ unmittelbar. Setzen wir

$$(2.1) \quad g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} \quad \text{für } |z| > \frac{1}{\alpha},$$

so gilt wegen der Regularität von $g(z)$ für $z = 1/\alpha$ in der Umgebung dieser Stelle

$$(2.2) \quad f\left(\frac{1}{z}\right) = g\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} g^{(\mu)}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^\mu.$$

Nun ist nach (2.1) für ganzes $\mu \geq 1$

$$(2.3) \quad \frac{1}{\mu!} g^{(\mu)}(z) = (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu + \nu}{\nu} \frac{a_{\nu+1}}{z^{\nu+\mu+1}} \quad \text{für } |z| > \frac{1}{\alpha}.$$

Entweder liegt $z = 1/\alpha$ im Innern des Konvergenzgebietes dieser Reihen; dann dürfen wir in (2.3) ohne weiteres $1/\alpha$ für z einsetzen. Oder liegt jene Stelle am Rande des Konvergenzgebietes; auch dann dürfen wir nach dem ABELSchen Stetigkeitssatz $1/\alpha$ für z einsetzen, weil die dadurch entstehende Reihe konvergiert. Es ist also

$$\frac{1}{\mu!} g^{(\mu)}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (-1)^\mu \alpha^{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu + \nu}{\nu} \alpha^\nu a_{\nu+1} \quad \text{für } \mu \geq 1.$$

Aus (2.1) ergibt sich durch dieselbe Überlegung

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = a_0 + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu a_{\nu+1},$$

und damit aus (2.2) in der Umgebung von $z = 1/\alpha$ die Entwicklung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_v + \alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \alpha^{\mu} \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+\nu}{\nu} \alpha^{\nu} a_{\nu+1},$$

woraus die Behauptung folgt.

Genau so wie sich oben das B -Verfahren aus dem E_p -Verfahren für $p \rightarrow \infty$ ergab, läßt es sich vermöge des Satzes S aus dem S_{α} -Verfahren für $\alpha \rightarrow 0$ gewinnen. Insgesamt zeigt unsere Betrachtung, wie das B -Verfahren in der Mitte zwischen dem E_p - und dem S_{α} -Verfahren steht, und wie alle drei Verfahren einer gemeinsamen Quelle, nämlich geeigneter Darstellung der Funktion $f(1/z)$, entspringen.

Wir vollziehen nun den Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ bzw. $\alpha \rightarrow 0$ noch auf eine zweite Weise. Der Konvergenzradius von (1.2) sei 1. Die bei E_p bzw. S_{α} eine Rolle spielenden, für $z = 1$ zu nehmenden Potenzreihenentwicklungen konvergieren dann im Äußeren von $\Re(- (2^p - 1))$ bzw. im Inneren von $\Re(1/\alpha)$. Betrachten wir sie auf dem Rand dieser Gebiete, so lassen sie sich dort als FOURIERSche Reihe auffassen, an deren Stelle wir im Grenzfall das FOURIERSche Integral setzen können. Es ist danach zu vermuten, daß die B -Summierbarkeit der Reihe (1.1) zusammenhängt mit dem Verhalten des bei $z = 1$ zu nehmenden FOURIER-Integrals der Funktion $f(1/z)$ auf der Geraden $\Re z = 1$. In der Tat besteht hier ein Zusammenhang. J. KARAMATA [3] hat als ersten Satz einer Gruppe von drei Sätzen über das B -Verfahren den folgenden bewiesen.

Satz B. *Das Funktionselement (1.2) besitze den Konvergenzradius 1 und sei in $\Re(\frac{1}{2})$ beschränkt. Dann ist*

$$B(x; s_p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t} f\left(\frac{1}{1+it}\right) dt \quad \text{für } x > 0,$$

so daß also dann und nur dann $B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ist, wenn das einfache FOURIER-Integral der Funktion $f(1/z)$ auf der Geraden $\Re z = 1$, genommen an der Stelle $z = 1$, zum Wert s konvergiert.

Die Sätze E und S können als Analoga zu diesem Satz B gelten, wodurch derselbe in den Gesamtzusammenhang der Verfahren E_p , B und S_{α} hereingestellt ist. Es ergibt sich nun die Aufgabe, auch die E_p - und S_{α} -Analoga zu den beiden anderen KARAMATASchen Sätzen aufzuzeigen.

3. Besitzt das Funktionselement (1.2) den Konvergenzradius 1 und bedeutet k eine positive reelle Zahl, ist ferner wie stets $p > 0$ und $0 < \alpha < 1$, so gelten die folgenden Sätze.

Satz E'. *Strebt $(1-z)^k f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\Re\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$, so ist*

$$E_p(n; s_p) \cong \frac{A n^k}{2^{pk} \Gamma(k+1)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz B' . Strebt $(1-z)^k f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2}\right)$, so ist

$$B(x; s_\nu) \cong \frac{Ax^k}{\Gamma(k+1)} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Satz S' . Strebt $(1-z)^k f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{R}\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$, so ist

$$S_\alpha(n; s_\nu) \cong \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{An^k}{\Gamma(k+1)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz B' ist der zweite der von J. KARAMATA bewiesenen Sätze. Die Analogie der drei Sätze zueinander ist offensichtlich. Die Gebiete $\mathfrak{R}\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$ bzw. $\mathfrak{R}\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$ gehen für $p \rightarrow \infty$ bzw. $\alpha \rightarrow 0$ in $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2}\right)$ über, so daß das B -Verfahren wieder in der Mitte zwischen dem E_p - und dem S_α -Verfahren steht. Die von J. KARAMATA zum Beweis des Satzes B' benützte Methode läßt sich auch zum Beweis der Sätze E' und S' anwenden. An die Stelle des LAPLACE-POISSONSchen Integrals treten dabei die folgenden Formeln. Es seien a und b komplex, m und n ganz, und es sei $n \geq 0$; dann ist für $0 < |a| < |b|$

$$(3.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\Phi}}{(a + be^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi = \begin{cases} \frac{(-a)^{m-n-1}}{b^m} \binom{m-1}{n} & \text{für } m > 0, \\ 0 & \text{für } m \leq 0, \end{cases}$$

und für $0 < |b| < |a|$

$$(3.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\Phi}}{(a + be^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi = \begin{cases} 0 & \text{für } m > 0, \\ \frac{(-1)^{n+1} (-a)^{m-n-1}}{b^m} \binom{-m+n}{n} & \text{für } m \leq 0. \end{cases}$$

Die Herleitung dieser Formeln mit Hilfe des Residuensatzes nach Ausführung der Substitution $z = e^{i\Phi}$ sei übergangen.

Beweis des Satzes E' . Wir setzen $r = 2^p > 1$, $q = r - 1 > 0$, und, hier und bei den folgenden Schritten an J. KARAMATA anschließend,

$$(3.3) \quad \varphi(t) = e^t (1 - e^{-t})^{k+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{k+1}{\nu} e^{-(\nu-1)t}.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so liegt der Kreis

$$(3.4) \quad z = \frac{1}{-q + (r + \varepsilon)e^{i\Phi}}, \quad -\pi \leq \Phi \leq \pi$$

im Innern des Einheitskreises; für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht er von innen in den Rand des Gebietes $\mathfrak{R}\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$ über. Nun setzen wir z aus (3.4) in

$$(3.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1} = \frac{z}{1-z} f(z)$$

ein; die linke Seite konvergiert dann gleichmäßig in Φ . Durch Multiplikation der entstehenden Gleichung mit $(2\pi)^{-1} \varphi(im\Phi)$, wobei

m positiv ganz ist, und Integration bekommen wir

$$(3.6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(im\Phi)}{(-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(im\Phi)}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi} - r} f\left(\frac{1}{-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi}}\right) d\Phi.$$

Auf der linken Seite erhalten wir, wenn wir $\varphi(im\Phi)$ gemäß (3.3) als unendliche Reihe mit der konvergenten Majorante $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{k+1}{\nu} \right|$ darstellen und (3.1) anwenden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{k+1}{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(\nu-1)m\Phi}}{(-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi \\ = \frac{1}{(r+\varepsilon)^m} \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} q^{m-1-n} s_n.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht dieser Ausdruck in $r^{-1} E_p(m-1; s_\nu)$ über. Sodann vollziehen wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ auch auf der rechten Seite von (3.6). Dazu schreiben wir den Integranden in der Form

$$F(\Phi, \varepsilon) = e^{im\Phi} (-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi})^k \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi} - r} \right)^{k+1} (1-z)^k f(z),$$

wobei z aus (3.4) zu entnehmen ist. Für $0 < |\Phi| < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varepsilon$ ist

$$\left| \frac{1 - e^{-im\Phi}}{(r+\varepsilon)e^{i\Phi} - r} \right| \leq \frac{m|\Phi| e^{m|\Phi|}}{(r+\varepsilon)|\sin \Phi|} < K,$$

wo K von Φ und ε unabhängig ist: zusammen mit der Hauptvoraussetzung erkennt man leicht, daß $F(\Phi, \varepsilon)$ beschränkt ist für $|\Phi| \leq \pi$, $0 < \varepsilon < 1$. Weiter ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\Phi, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Phi = 0, \\ G(\Phi) & \text{für } |\Phi| \leq \pi, \Phi \neq 0, \end{cases}$$

wobei die Funktion $G(\Phi) =$

$$e^{im\Phi} (-q + r e^{i\Phi})^k \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{r e^{i\Phi} - r} \right)^{k+1} \left(1 - \frac{1}{-q + r e^{i\Phi}} \right)^k f\left(\frac{1}{-q + r e^{i\Phi}} \right)$$

mit dem Wert $(m/r)^{k+1} A$ bei $\Phi = 0$ stetig ist für $|\Phi| \leq \pi$. Die rechte Seite von (3.6) strebt daher für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} G(\Phi) d\Phi$.

Insgesamt bekommen wir aus (3.6) also

$$\frac{1}{n^k} E_p(m-1; s_\nu) = \frac{m}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{e^{im\Phi}} \right)^{k+1} g(\Phi) d\Phi, \\ g(\Phi) = \left(\frac{e^{i\Phi}}{e^{i\Phi} - 1} \right)^{k+1} (-q + r e^{i\Phi})^k \left(1 - \frac{1}{-q + r e^{i\Phi}} \right)^k f\left(\frac{1}{-q + r e^{i\Phi}} \right).$$

Wir nehmen nun die Zerlegung $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$ vor. Wegen $g(\Phi) \rightarrow A$ für $\Phi \rightarrow \pm 0$ und wegen

$$(3.7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} \left(\frac{1 - e^{-it}}{it} \right)^{k+1} dt = \frac{1}{\Gamma(k+1)}$$

(vgl. [3], S. 159) erhalten wir, indem wir auf jedes der beiden Teilintegrale einen geläufigen Permanenzsatz anwenden, dessen Voraussetzungen leicht als erfüllt zu erkennen sind,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^k} E_p(m-1; s_\nu) \\ = A \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{im\Phi} \right)^{k+1} d\Phi = \frac{A}{r^k \Gamma(k+1)}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz E' bewiesen.

Beweis des Satzes S' . Die jetzt anzustellenden Überlegungen verlaufen ganz analog zu denen des letzten Beweises, so daß wir uns kurz fassen können. Wir setzen $\beta = 1/\alpha > 1$ und $\gamma = \beta - 1 > 0$. Der Kreis

$$(3.8) \quad z = \frac{1}{\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}}, \quad -\pi \leq \Phi \leq \pi$$

liegt für $0 < \varepsilon < \gamma$ im Inneren des Einheitskreises und geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ von innen in den Rand des Gebietes $\mathfrak{R} \left(\frac{1}{2 - \alpha} \right)$ über. Wir setzen z aus (3.8) in (3.5) ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes positives m mit $(2\pi)^{-1} \varphi(-im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi})^{n+1}} d\Phi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{\gamma - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}} f\left(\frac{1}{\beta - (\gamma - \varepsilon) e^{i\Phi}}\right) d\Phi. \end{aligned}$$

Vermöge (3.3) und (3.2) ergibt sich auf der linken Seite

$$\left(\frac{\gamma - \varepsilon}{\beta} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{s_n}{\beta^{n+1}} - (k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\beta^{n+1}}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^k} (S_\alpha(m; s_\nu) - (k+1) S_\alpha(0; s_\nu)) &= \frac{m}{2\pi \gamma^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\Phi} \left(\frac{e^{im\Phi} - 1}{im\Phi} \right)^{k+1} h(\Phi) d\Phi, \\ h(\Phi) &= \left(\frac{e^{i\Phi}}{e^{i\Phi} - 1} \right)^{k+1} (\beta - \gamma e^{i\Phi})^k \left(1 - \frac{1}{\beta - \gamma e^{i\Phi}} \right)^k f\left(\frac{1}{\beta - \gamma e^{i\Phi}} \right) \rightarrow A \text{ für } \Phi \rightarrow \pm 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^k} S_\alpha(m; s_v) = A \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2\pi \gamma^k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\Phi} \left(\frac{e^{im\Phi} - 1}{im\Phi} \right)^{k+1} d\Phi = \frac{A}{\gamma^k \Gamma(k+1)}.$$

4. Wir kommen nun noch zum dritten der von J. KARAMATA bewiesenen Sätze über das B -Verfahren und zu den entsprechenden Sätzen für E_p und S_α . Das Funktionselement (1.2) besitze wieder den Konvergenzradius 1, dagegen sei jetzt k eine positive ganze Zahl⁵⁾. Bedeutet

$$C_k(n; s_v) = \sigma_k(n; s_v) / \binom{n+k}{n} \quad \text{mit} \quad \sigma_k(n; s_v) = \sum_{v=0}^n \binom{n-v+k-1}{n-v} s_v$$

($n = 0, 1, \dots$) die Folge der CESÄROSCHEN Mittel k -ter Ordnung der Folge s_n , so gilt:

Satz E'' . Strebt $f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{R}\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)$, so ist die Folge $C_k(n; s_v)$ durch das E_p -Verfahren limitierbar zum Wert A .

Satz B'' . Strebt $f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2}\right)$, so ist die Folge $C_k(n; s_v)$ durch das B -Verfahren limitierbar zum Wert A .

Satz S'' . Strebt $f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$, so ist die Folge $C_k(n; s_v)$ durch das S_α -Verfahren limitierbar zum Wert A .

Beweis des Satzes E'' . An den KARAMATASCHEN Beweis des Satzes B'' anschließend setzen wir z aus (3.4) in

$$(4.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_k(n; s_v) z^{n+k+1} = \frac{z^{k+1}}{(1-z)^{k+1}} f(z)$$

ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes $m > k$ mit $(2\pi)^{-1} \varphi(im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$(4.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(n; s_v)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(im\Phi)}{(-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi})^{n+k+1}} d\Phi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(im\Phi)}{((r+\varepsilon)e^{i\Phi} - r)^{k+1}} f\left(\frac{1}{-q + (r+\varepsilon)e^{i\Phi}}\right) d\Phi.$$

Auf der linken Seite ergibt sich vermöge (3.3) und (3.1)

$$\sum_{n=0}^{m-1-k} \sigma_k(n; s_v) \frac{q^{m-n-k-1}}{(r+\varepsilon)^m} \binom{m-1}{n+k} \\ = \frac{1}{(r+\varepsilon)^m} \binom{m-1}{m-k-1} \sum_{n=0}^{m-k-1} C_k(n; s_v) q^{m-k-1-n} \binom{m-k-1}{n}.$$

Dieser Ausdruck geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ in

$$\frac{\Gamma(m)}{r^{k+1} \Gamma(m-k) \Gamma(k+1)} E_p(m-k-1; C_k(n; s_v))$$

⁵⁾ Der folgende Satz B'' wurde von J. KARAMATA für positives reelles k bewiesen. Wir beschränken uns hier auf positives ganzes k .

über. Der Integrand

$$\bar{F}(\Phi, \varepsilon) = e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{(r + \varepsilon)e^{i\Phi} - r} \right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q + (r + \varepsilon)e^{i\Phi}} \right)$$

auf der rechten Seite von (4.2) ist beschränkt für $|\Phi| \leq \pi$, $0 < \varepsilon < 1$, und es ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}(\Phi, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Phi = 0, \\ \bar{G}(\Phi) & \text{für } |\Phi| \leq \pi, \Phi \neq 0, \end{cases}$$

wobei die Funktion

$$\bar{G}(\Phi) = e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{r(e^{i\Phi} - 1)} \right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q + re^{i\Phi}} \right)$$

mit dem Wert $(m/r)^{k+1}A$ bei $\Phi = 0$ stetig ist für $|\Phi| \leq \pi$. Da die rechte Seite von (4.2) somit für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{G}(\Phi) d\Phi$ strebt, erhalten wir aus (4.2)

$$\begin{aligned} & E_p(m - k - 1; C_k(n; s_\nu)) \\ &= \frac{m^k \Gamma(m - k) \Gamma(k + 1)}{\Gamma(m)} \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{im\Phi} \right)^{k+1} \bar{g}(\Phi) d\Phi, \\ & \bar{g}(\Phi) = \left(\frac{im\Phi}{e^{i\Phi} - 1} \right)^{k+1} f\left(\frac{1}{-q + re^{i\Phi}} \right) \rightarrow A \quad \text{für } \Phi \rightarrow \pm 0, \end{aligned}$$

und daraus auf Grund des Permanenzsatzes bei Integralmittelbildung und wegen (3.7)

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} E_p(m - k - 1; C_k(n; s_\nu)) \\ &= A \Gamma(k + 1) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\Phi} \left(\frac{1 - e^{-im\Phi}}{im\Phi} \right)^{k+1} d\Phi = A. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes S'' . Wir gehen analog zum vorigen Beweis vor. Wir setzen z aus (3.8) in (4.1) ein, multiplizieren die entstehende Gleichung für ein ganzes positives m mit $(2\pi)^{-1} \varphi(-im\Phi)$ und erhalten durch Integration

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(n; s_\nu)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\beta - (\gamma - \varepsilon)e^{i\Phi})^{n+k+1}} d\Phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(-im\Phi)}{(\gamma - (\gamma - \varepsilon)e^{i\Phi})^{k+1}} f\left(\frac{1}{\beta - (\gamma - \varepsilon)e^{i\Phi}} \right) d\Phi. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert

$$\begin{aligned} S_\alpha(m+k; C_k(n; s_\nu)) &= \frac{\Gamma(k+2) \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+1)} S_\alpha(k; C_k(n; s_\nu)) \\ &= \frac{m^k \Gamma(m+1) \Gamma(k+1)}{\Gamma(m+k+1)} \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\Phi} \left(\frac{e^{im\Phi} - 1}{im\Phi} \right)^{k+1} \bar{h}(\Phi) d\Phi, \\ \bar{h}(\Phi) &= \left(\frac{i\Phi}{e^{i\Phi} - 1} \right)^{k+1} f\left(\frac{1}{\beta - \gamma e^{i\Phi}} \right) \rightarrow A \quad \text{für } \Phi \rightarrow \pm 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Schrifttum.

L. BIEBERBACH.

- [1] Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, 3, 1 (1909—1921), S. 379 bis 532.

G. DOETSCH.

- [2] Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation, Berlin (1937).

J. KARAMATA.

- [3] Über die B -Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande, Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 156—160.

K. KNOPP.

- [4] Über das EULERSche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 226 bis 253; Über das EULERSche Summierungsverfahren (II. Mitteilung), Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 125—156.

W. MEYER-KÖNIG.

- [5] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 52, Heft 3 (1949), S. 257—304.
[6] Die E_p -Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Archiv der Mathematik 1, Heft 3 (1948/49), S. 227—229.

(Eingegangen am 13. November 1948.)

Einführung in die Physik

Von

Robert Wichard Pohl

o. ö. Professor der Physik an der Universität Göttingen

Erster Band: Einführung in die Mechanik, Akustik u. Wärmelehre

Zehnte und elfte, verbesserte und ergänzte Auflage

Mit 547 Abbildungen, darunter 8 entlehnten. VIII, 356 Seiten. 1947. DMark 21.—

Inhaltsverzeichnis:

Mechanik. Einführung. Längen- und Zeitmessung — Darstellung von Bewegungen, Kinematik — Grundlagen der Dynamik — Einfache Schwingungen, Zentralbewegungen und Gravitation — Hilfsbegriffe. Arbeit, Energie, Impuls — Drehbewegungen fester Körper — Beschleunigte Bezugssysteme — Einige Eigenschaften fester Körper — Über ruhende Flüssigkeiten und Gase — Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen.

Akustik. Schwingungslehre — Wellen und Strahlung.

Wärmelehre. Grundbegriffe — I. Hauptsatz und Zustandsgleichungen — Wärme als ungeordnete Bewegung — Transportvorgänge, insbesondere Diffusion und Wärmeleitung — Zustandsänderungen von Gasen und Dämpfen — Die Zustandsgröße Entropie — Umwandlung von Wärme in Arbeit. II. Hauptsatz.

Anhang — Sachverzeichnis — Tafeln.

Zweiter Band: Einführung in die Elektrizitätslehre

Dreizehnte und vierzehnte Auflage

Mit 497 Abbildungen, darunter 20 entlehnten. IV, 302 Seiten. 1949. DMark 18.60

Inhaltsverzeichnis:

Meßinstrumente für Strom und Spannung — Das elektrische Feld — Kräfte und Energie im elektrischen Feld — Kapazitive Stromquellen und einige Anwendungen elektrischer Felder — Materie im elektrischen Feld — Das magnetische Feld — Verknüpfung elektrischer und magnetischer Felder — Kräfte in magnetischen Feldern — Materie im Magnetfeld — Anwendungen der Induktion, insbesondere induktive Stromquellen und Elektromotoren — Trägheit des Magnetfeldes und Wechselströme — Mechanismus der Leitungsströme — Elektrische Felder in der Grenzschicht zweier Substanzen — Die Radioaktivität — Elektrische Wellen — Das Relativitätsprinzip als Erfahrungstatsache — Anhang: Die elektrischen Einheiten — Vergleichende Übersicht über die Schreibweise einiger Gleichungen — Sachverzeichnis — Periodisches System der Elemente — Magnetische Feldvektoren und Einheiten. Nebenbegriffe — Oft gebrauchte Gleichungen — Längeneinheiten, Kräfteinheiten, Druckeinheiten, Energieeinheiten — Winkelmessung. Wichtige Konstanten — Ergänzungen — Berichtigungen.

Dritter Band: Einführung in die Optik

Siebente und achte Auflage

Mit 565 Abbildungen im Text und auf einer Tafel, darunter 13 entlehnten

IV, 356 Seiten. 1948. DMark 21.—

Inhaltsverzeichnis:

Die einfachsten optischen Beobachtungen — Abbildung und die Bedeutung der Lichtbündelbegrenzung — Einzelheiten, auch technische, über Abbildung und Bündelbegrenzung — Energie der Strahlung und Bündelbegrenzung — Interferenzerscheinungen nebst Anwendungen — Beugung nebst Anwendungen. Beugung an undurchsichtigen Strukturen. Beugungerscheinungen an durchsichtigen Strukturen — Geschwindigkeit des Lichts und Licht in bewegten Bezugssystemen — Polarisiertes Licht — Zusammenhang von Reflexion, Brechung und Absorption des Lichtes — Streuung und Dispersion — Quantenhafte Absorption und Emission der Atome — Quantenhafte Absorption und Emission von Molekülen — Der Dualismus von Welle und Korpuskel — Über Strahlungsmessung und Lichtmessung. Über Farben und Glanz — Anhang: Dosierung von Röntgenlicht — Sachverzeichnis — Tafeln.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Taschenbuch **für** **Chemiker und Physiker**

Herausgegeben von
Dr.-Ing. Jean D'Ans
Professor an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg
und
Dr. phil. Ellen Lax
Physikerin in Berlin

Mit 350 Abbildungen und graphischen Darstellungen

Zweite, berichtigte Auflage

VIII, 1896 Seiten. 1949

Ganzleinen DMark 36.—

Das Taschenbuch für Chemiker und Physiker ist seit Jahren weiten Kreisen von Wissenschaftlern und Praktikern zu einem unentbehrlichen Vademecum für die Laboratoriumspraxis geworden. Da eine Neubearbeitung, die den praktischen Bedürfnissen und der wissenschaftlichen Entwicklung Rechnung trägt, längere Vorbereitungsarbeit erfordert, wird den vielfach geäußerten dringenden Wünschen durch Vorlage eines berichtigten Neudrucks entsprochen.

Inhaltsübersicht:

Maßsysteme und Stoffanordnung — Allgemeine Konstanten und Angaben über Atome und Moleküle — Makroskopische Zahlenwerte — Astrophysik, Geophysik, Geochemie — Eigenschaften von Werkstoffen — Meßtechnische Daten — Analyse — Mathematische Tabellen — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.

Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.